











**MEMORIE**  
**DELLA**  
**REALE ACCADEMIA**  
**DELLE SCIENZE**  
**DI TORINO.**

S. 1109. B. 26.

MEMORIE  
DELLA  
REALE ACCADEMIA  
DELLE SCIENZE  
DI TORINO.

---

TOMO XXVI.

---

TORINO  
DALLA STAMPERIA REALE  
MDCCCXXI.

THE HISTORY OF

THE UNITED STATES

OF AMERICA



# INDICE

DEL TOMO XXVI.

---

Elenco degli Accademici nazionali . . . . .	<i>pag.</i> VII
Memorie istoriche intorno alla vita ed agli studi di Gianfrancesco Cigna. Del Professore A. M. VASSALLI-EANDI . . . . .	XIII

## CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE.

Nouvelles considérations sur la théorie des proportions déterminées dans les combinaisons, et sur la détermination des masses des molécules des corps. Par le Chev. AVOGADRO. <i>pag.</i> I	
Cenni d'Ortopedia. Del Chirurgo-Ernista BARTOLOMMEO BORRELLA . . . . .	163
Mémoire sur les intégrales définies. Par M. le Chev. CISA DE GRÉSY . . . . .	209
Continuazione del Saggio di Orittografia Piemontese. Del Professore STEFANO BORSON . . . . .	297
Saggio intorno ad alcuni fenomeni elettromagnetici e chimici. Del Professore VITTORIO MICHELOTTI . . . . .	365
Memoria sulla composizione chimica di diverse specie di borace brutto di Levante. Di GIOVANNI BATTISTA CANOBBIO .	381
De natura vegetabili Gorgoniarum. Auct. G. L. C. GRAVENHORST	411
Descrizione di una particolare batteria Voltiana. Del Professore VITTORIO MICHELOTTI . . . . .	433.

Mémoire sur la manière de ramener les composés organiques aux lois ordinaires des proportions déterminées. Par le Chev. AVOGADRO . . . . .	pag. 440
Ad Verbascum Cisalpinum, a Cl. Medico Johanne Biroli No- variensi descriptum, ALOYSII COLLA observationes . . . .	507
Note sur l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + gx^m \cdot y = 0$ Par M. le Professeur PLANA . . . . .	519
Description d'un animal nouveau qui appartient à la classe des Echinodermes. Par M. le Professeur ROLANDO . . . .	539
Addition à la Note sur l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + gx^m \cdot y = 0$ . Par M. le Professeur PLANA . . . .	557

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE.

Del territorio Piraico. Illustrazione del luogo di Tucidide lib. III N.° 91. Del Professore AMEDEO PEYRON . . . .	pag. 1
CAROLI BOUCHERONII. De Josepho Vernazza Albensi . . . .	11

# ELENCO

## DEGLI ACCADEMICI NAZIONALI

ADDÌ XV DI LUGLIO DEL MDCCCXXII.

---

### *Presidente*

Conte Prospero BALBO, Cavaliere di Gran Croce, Ministro di Stato, de' Decurioni della Città di Torino.

### *Vice-Presidente*

Conte Giuseppe AUDIBERTI, primo Medico delle Loro Maestà, Capo del Magistrato del Protomedicato, membro del Magistrato de' Conservatori generali di Sanità, Direttore generale delle Vaccinazioni, Professore emerito nella Regia Università, Medico generale del Regio esercito.

### *Segretario Perpetuo*

Abate Anton-Maria VASSALLI-EANDI, Professore emerito di Fisica nella Regia Università, Direttore della Specola, e del Musco di Storia naturale, Professore di Fisica nella Regia Accademia Militare.

*Tesoriere*

Lodovico BELLARDI, membro del Magistrato del Protomedicato, Dottore collegiato di Medicina.

---

## CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE.

*Direttore*

Conte Giuseppe AUDIBERTI predetto.

*Segretario*

Giacinto CARENA, Professore di Filosofia, Professore straordinario degli Studi Fisici nella Regia Accademia Militare.

*Accademici*

Giovanni Antonio GIOBERT, Professore, nella Regia Università, di Chimica generale, ed applicata alle arti.

Cavaliere Ignazio MICHELOTTI, Ispettore de' ponti e strade, Professore emerito di Matematica nella Regia Università, de' Decurioni della Città di Torino, membro del Consiglio d' Architettura.



Francesco Rossi, Professore emerito di Chirurgia nella Regia Università.

Conte Michele Saverio PROVANA, Intendente generale, Cavaliere dell'Ordine Militare de' Santi Maurizio e Lazzaro, de' Decurioni della Città di Torino.

Giorgio BIDONE, Professore d'Idraulica nella Regia Università.

Giovanni PLANA, Professore d'Analisi nella Regia Università, e di Matematiche nella Regia Accademia Militare, Regio Astronomo.

Franco Andrea BONELLI, Professore di Zoologia nella Regia Università, Sotto-Direttore del Museo di Storia Naturale.

Vittorio MICHELOTTI, Professore di Chimica Medico-Farmaceutica nella Regia Università.

Luigi ROLANDO, Professore di Notomia nella Regia Università. Cavaliere Tommaso ASINARI CISA DI GRESY, Professore di Meccanica nella Regia Università.

Abate Stefano BORSON, Professore di Mineralogia nella Regia Università, Sotto-Direttore del Museo di Storia Naturale.

Conte ANTONIO VAGNONE.

Carlo Francesco BELLINGERI, Dottore Collegiato di Medicina. Cavaliere Amedeo AVOCADRO di Quaregna, Professore di Fisica sublime nella Regia Università.

Luigi COLLA, Avvocato Collegiato.

*Non residenti in Torino.*

Conte BERTHOLLET, Pari di Francia, in Parigi.

Cavaliere VICHARD DI S. REAL, Intendente generale della Marina, in Genova.

Giuseppe GAUTIERI, Ispettore generale de' boschi, in Milano.  
 Ambrogio MULTEDO, Professore emerito di Matematica, in  
 Genova.

G. A. BORGNIS, Ingegnere civile, in Parigi.

Giambattista BALBIS, Professore di Botanica, in Lione.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE,  
 E FILOLOGICHE.

*Direttore*

Marchese Ottavio FALLETTI DI BAROLO, Gentiluomo di Camera  
 di Sua Maestà.

*Segretario*

*Vaca.*

*Accademici*

Conte Giuseppe Amedeo CORTE DI BONVICINO, Cavaliere di  
 Gran Croce dell' Ordine Militare de' Santi Maurizio e  
 Lazzaro, Primo Presidente, Controllore generale delle  
 Regie Finanze.

Contessa Diodata ROERO DI REVELLO, nata SALUZZO.

Conte Emanuele BAVA DI SAN PAOLO, Gentiluomo di Camera  
 onorario di Sua Maestà, Cavaliere di Gran Croce dell' Or-  
 dine Militare de' Santi Maurizio e Lazzaro.

Conte Gianfrancesco GALEANI NAPIONE DI COCCONATO , Cavaliere di Gran Croce dell' Ordine Militare de' Santi Maurizio e Lazzaro , Soprintendente , e Presidente Capo dei Regii Archivi di Corte, Primo Presidente, Consigliere di Stato di Sua Maestà , Rappresentante , e faciente le veci del Capo del Magistrato della Riforma in caso d' assenza o d' impedimento d' esso.

Cavaliere Cesare SALUZZO , membro del Collegio delle Arti , Comandante in secondo e Direttore generale degli Studi nella Reale Accademia Militare , Decurione della Città di Torino.

Conte Giuseppe FRANCHI DI PONT , Condirettore del Museo d' Antichità , e Professore d' Archeologia nella Regia Università.

Conte PROVANA predetto.

Professore CARENA predetto.

Carlo BOUCHERON , Segretario di Stato onorario , Professore di Eloquenza Latina e Greca nella Regia Università , Professore di Belle Lettere nella Regia Accademia Militare.

Abate Amedeo PEYRON , Teologo Collegiato , Professore di Lingue Orientali nella Regia Università.

Giuseppe GRASSI.

Abate Giuseppe BIAMONTI , Professore di Eloquenza Italiana nella Regia Università.

Abate Pietro Ignazio BARUCCHI Direttore del Museo di Antichità , Professore di Logica , e Metafisica nella Regia Università.

Abate Giuseppe BESSONE Dottore Collegiato in leggi , Bibliotecario nella Regia Università.

Carlo RANDONI faciente le veci d'Architetto di Sua Maestà , membro del Consiglio d'Architettura.

*Non residenti in Torino.*

Carlo FEA , Bibliotecario della Chigiana , in Roma.

Conte Saverio MAISTRE , Generale negli Eserciti dell'Imperatore di tutte le Russie , in Pietroburgo.

Giorgio Maria RAYMOND , R. Professore , in Ciamberi.

Gianbernardo DEROSI , Professore di Lingue Orientali , in Parma.

Conte Francesco DE-LOCHE DE MOUXY , Maggiore Generale nelle R. Armate , in Ciamberi.

Cavaliere Don Ludovico BAILLE , Segretario della R. Società Agraria ed Economica di Cagliari.

Conte Giambatista SOMIS di Chiavrie Avvocato generale di Sua Maestà , Reggente l'Ufficio di Regio Fisco generale presso il Reale Senato di Genova.

Conte Alessandro SALUZZO Inviato Straordinario , e Ministro Plenipotenziario di Sua Maestà presso l'Imperatore delle Russie.

Monsignore Giuseppe AIRENTI Vescovo di Savona e Noli.

Marchese Enrico COSTA DI BEAUREGARD Cavaliere di Gran Croce , Maggior Generale nelle Regie Armate.

## MEMORIE ISTORICHE

INTORNO ALLA VITA ED AGLI STUDI

DI

GIANFRANCESCO CIGNA (1)

DEL PROFESSORE ANTONMARIA VASSALLI-EANDI

*Lette nell' adunanza del 14 aprile 1822.*

LA famiglia Cigna originaria di Vico (2) è una delle antiche della Provincia del Mondovì. Essa ebbe molti uomini distinti nel maneggio de' pubblici affari, nell' arte medica, nella giurisprudenza, e nella carriera ecclesiastica (3).

Di Filippo Cigna Dottore Collegiato in medicina, e di Andretta Beccaria anch' essa di antica famiglia (4) nacque in Mondovì il dì 2 di luglio del 1734 Gianfrancesco Cigna uno dei tre fondatori di questa Accademia delle Scienze, primo Segretario perpetuo della medesima, dei quaranta della Società Italiana, della Società Reale di Londra, Consigliere nel Magistrato del Protomedicato, e Professore di notomia nella Regia Università di Torino.

Egli studiò in patria la Gramatica, le Umane lettere, la Rettorica e la Filosofia, ed ebbe a maestro di quest' ultima

il Protomedico Alessandro Bona che fu uno de' più valenti Professori di Filosofia di quel tempo.

È probabile cosa, che la tradizione de' meriti scientifici de' suoi antenati e del suo genitore eccitasse in lui quella nobile emulazione la quale porta seco un tale amore del sapere che non si guarda a' disagi per farne acquisto.

Questo amor di sapere cominciò a manifestarsi nel corso de' suoi primi studii, nei quali si distinse a segno che nel 1750 ottenne al concorso il posto di alunno per la Medicina nel Real Collegio delle Province, ove si portò in novembre a studiare la Fisica che leggeva alla Regia Università il Padre Beccaria. Chiamato questi due anni prima a sì onorevole cattedra alla quale pure aspirava il Padre Francesco Jacquier (5), giustificò ben presto la sua nomina colla sceltezza delle sue dottrine, e pose ogni sua cura nel coltivar in particolar modo quelli fra suoi allievi dei quali l'ingegno prometteva una non ordinaria riuscita nel successivo corso de' loro studi.

Avendo egli conosciuto nel Cigna suo paesano e figlio di una Beccaria le disposizioni necessarie per acquistarsi rinvigorimento nelle scienze naturali lo invitò ad assistere alle sue private sperienze, nella frequente presenza alle quali apprese egli ben tosto la difficile arte, e nel tempo stesso gli ingegnosi ritrovamenti, e le utili massime di sì gran maestro.

L'anno seguente studiò la Fisica Luigi de la Grange, i cui rari talenti non tardarono a farsi palesi al Beccaria che lo



ebbe in particolare pregio , e gli permise pure d' intervenire alle private sue esercitazioni, alle quali trovavasi tuttora il Cigna , benchè avesse già intrapreso il corso di medicina. Questi due egregii giovani non tardarono guari a conoscersi scambievolmente , ed il comune ardore per lo studio delle scienze esatte strinse talmente gli animi loro che sebbene corressero poi una diversa carriera , pure continuarono a trovarsi quasi ogni giorno per ragionare insieme dei loro studi , e fare qualche volta alcune sperienze (6).

Nello stesso tempo che il Cigna ed il de la Grange si distinguevano tra i più studiosi allievi nella Regia Università , si segnalava tra i Paggi del Re , pel suo amore allo studio , il Cavaliere Giuseppe Angelo Saluzzo , che il Re CARLO EMANUELE III di sempre felice memoria promosse nel 1753 al grado di Ufficiale nel Real Corpo di Artiglieria.

Tosto che il Saluzzo si trovò col D' Antoni , ed altri Uffiziali di quel dotto corpo , che allo studio delle matematiche unisce quello delle scienze fisiche (7), si diede a coltivare col maggiore impegno le medesime scienze , e particolarmente le fisico-chimiche.

Assistendo il Saluzzo alle lezioni di matematica di Domenico Michelotti Professore nelle Regie Scuole d'Artiglieria si trovò compagno di scuola col de la Grange. Conoscersi , stimarsi ed amarsi scambievolmente fu una cosa sola , e ben tosto il de la Grange non ebbe maggior premura che quella di procurare al Saluzzo la conoscenza del Cigna il quale tanto più volentieri il volle a compagno negli studii,

che il Saluzzo particolarmente si occupava d'indagini al Cigna predilette.

L'amicizia del Cigna e del de la Grange procacciò ben presto al Saluzzo la conoscenza del Beccaria, il quale scorrendo in esso un amore ardente per le scienze ed una grande capacità per acquistarle, molto volentieri acconsentì che col Cigna e col de la Grange intervenisse alle sue private sperienze, ed a scientifici ragionamenti che intorno ad esse si facevano.

Animati sempre più i tre giovanetti dalle lezioni del Beccaria mentre ognuno attendeva agli studi particolari della carriera intrapresa, giornalmente si riunivano insieme per comunicarsi le loro considerazioni concernenti alle cose fisiche.

Nè lo studio della fisica allentava nel Cigna quello delle cose mediche, il che è manifesto da ciò, che, presa nel 1754 la licenza, fu nominato Ripetitore degli studenti del primo anno, la qual cosa, come notai nella vita di Eandi (8), è una prova che il Cigna era fra i più distinti del suo corso tanto nel sapere, quanto nella condotta.

Nell'esame pubblico di laurea che fu nel 1755 diede tal saggio della sua dottrina che fu tosto giudicato degno di essere aggregato al Collegio di medicina, e nello stesso tempo fu nominato Ripetitore di medicina pratica nel Collegio del quale era stato alunno.

Per due anni attese specialmente allo studio di quelle parti della scienza medica delle quali divisava di trattare nella sua aggregazione al Collegio, al quale fu ascritto nel 1757.



Le tesi (9) che propose a difendere sono state applauditissime, e menarono gran rumore quelle di fisica e delle istituzioni mediche. Nella prima che intitolò = *De electricitate* = comprese quanto il Beccaria stampò nel 1753 nella sua opera = *Dell' elettricismo artificiale e naturale* = con molte aggiunte comunicategli dallo stesso Beccaria. Nella seconda che ha per titolo = *De irritabilitate* = prese il Cigna a difendere l' irritabilità Halleriana. Questa tesi fu da Haller istesso tradotta in Francese, e inserita nella raccolta da lui fatta su questo argomento. Non molto dopo contro questa tesi fu pubblicata una critica la quale servi non poco ad accrescere la fama del Cigna (10), il quale rispose da maestro in difesa di Haller.

Aggregato al Collegio si diede a studiare la pratica medica che doveva spiegare agli allievi alla sua cura commessi. Lo studio della pratica portò il Cigna a quello della anatomia, e della fisiologia; poichè comprese tosto l' importanza dell' ispezione dei cadaveri per conoscere le alterazioni cagionate dalle malattie, e queste ricerche necessariamente conducono a quelle della struttura delle parti e dell' uso delle medesime. Questi studi mossero il Cigna a coltivare specialmente quelle scienze fisiche che colla fisiologia hanno particolare relazione.

Ben persuaso che molta messe rimane sempre a raccogliersi negli scrittori antichi, e che per imparare bene una scienza non basta di studiare gli ultimi scrittori della medesima, ma che giova sommamente il saperne la storia, e

conoscerne i progressi, cercava sempre di esaminare i trattati che parlano delle materie che più amava, colla certezza di acquistare molte idee di sperienze da farsi mentre imparava la storia della scienza. A tal fine consultando i libri che sono nella Biblioteca della Regia Università ebbe la buona sorte di ritrovare l'opera del Mayow che il Delaméthérie fece conoscere nel 1790 nel giornale di fisica, avvertendo che questo scrittore aveva in varie parti preceduto di un secolo parecchie famose scoperte pneumatichimiche (11).

Mentre andava lieto e glorioso il Beccaria di aver formato tre discepoli capaci di fare progredire le scienze, e compiacevasi nel dirigerli nelle loro ricerche, e fare anche quelle sperienze per le quali ad essi mancavano i necessari stromenti, parve ai medesimi di avere trovato qualche fenomeno non affatto consentaneo alle dottrine dal Beccaria insegnate (12); o sia per qualche leggiera imprudenza giovanile nel presentare il loro ritrovato al Maestro, o per eccessiva irritabilità di questi, tal cosa raffreddò alquanto l'amicizia tra il Beccaria ed i tre discepoli che coi loro studi già si erano acquistata qualche fama.

Il risentimento del Beccaria ben lungi di scemare il loro ardore per le scienze lo accrebbe, e stabilirono una società alla quale invitarono gli uomini che godevano maggiore riputazione nelle scienze, e particolarmente Ambrogio Bertrandi, e Carlo Allioni (13), i quali di buon grado si unirono ai tre giovanetti che davano le più grandi speranze di

riuscire, come in fatti riuscirono, tre luminari delle scienze.

Il Cigna fu prescelto a Segretario della medesima per iscrivere le sperienze che si facevano in società, le quali si leggono in principio del tomo 1.<sup>o</sup> della Società Filosofico-Matematica col titolo = De iis quae in societate acta sunt commentarii conscripti a Johanne Francisco Cigna. =

In questi commentarii scritti con molta pulitezza e proprietà (14) sono esposte le principali ricerche dai medesimi fatte in tanti titoli separati, colla indicazione degli autori delle varie sperienze, cosicchè si vede chiaramente qual parte ebbe il Saluzzo, quale il de la Grange, e quale il Cigna nelle loro scoperte fatte in comune.

Poco tempo prima aveva il Symmer pubblicato le sue sperienze dalle quali dedusse la probabilità che i fenomeni elettrici siano cagionati da due fluidi coesistenti. Il Cigna si diede a studiare e ripetere in mille maniere le sperienze del Symmer, e le portò tant' oltre che il Priestley nella sua storia dell' elettricità le giudicò più importanti di quelle dello stesso Symmer. Si occupò lungo tempo il Cigna di queste sperienze, e diceva spiegarsi ugualmente i fenomeni nelle due teorie del solo fluido Frankliniano e dei due fluidi coesistenti Symmeriani, non vedendovi speranza decisiva nè in favor dell' una, nè in favor dell' altra teoria (15), la qual cosa al Beccaria non andava punto a sangue; ed è probabile che la piccola inimicizia insorta tra il Beccaria ed i suoi tre discepoli abbia spinto il Cigna ad attribuire un maggior pregio alle sperienze Symmeriane,

nelle quali egli progredi a segno che scoprì la legge della accumulazione dell' elettricità contraria nel corpo deferente comunicante col suolo posto in contatto di un coibente elettrizzato, ed avrebbe dato il suo nome all' elettroforo (16) se la sua salute non fosse stata gravemente alterata dalle sue intense meditazioni.

Ma nel tempo che col maggior ardore studiava il Cigna l' Anatomia e la Fisiologia coll' ajuto dei compagni ripetitori di Chirurgia e faceva continue sperienze fisiche, nel 1765 cadde gravemente ammalato. La sua malattia fu di lunga durata, ed indebolì sommamente le sue forze, laonde sebbene appena superato il prossimo pericolo della morte abbia atteso allo studio di cose anatomiche e fisiologiche commettendo all' amico Vincenzo Malacarne (17) quelle ricerche che desiderava di fare, e che lo stato di salute non gli permetteva di eseguire, tuttavia vediamo che pochi in paragone dei precedenti sono i suoi scritti dopo tale malattia.

Certamente per le moltissime ricerche fisiche, anatomiche e fisiologiche che colla scorta delle Memorie delle più celebri accademie, e dei più valenti scrittori antichi e moderni aveva fatto, si trovava ad avere una tale suppellettile di cognizioni che poteva per lungo tempo dare alla Società, della quale era Segretario, e a molti altri Istituti scientifici, preziosi monumenti del suo sapere; ma la sua debole salute poco gli permetteva di dettare i suoi pensamenti.

Nel 1766 però pubblicò uno scritto col titolo = *De novis quibusdam experimentis electricis* = che accrebbe grandemente la sua pubblica estimazione non solo in Piemonte ove l'aveva distribuito ad alcuni suoi amici, ma ancora in Inghilterra ove lo mandò alla Reale Società di Londra. Questo scritto, come ottimamente notò Eandi solleticò talmente l'amor proprio del Beccaria che datosi a fare moltissime sperienze analoghe a quelle del Cigna, le mandò nello stesso anno egli pure alla Società Reale di Londra (18).

Non potendo guari attendere a nuove ricerche riandava il Cigna gli studi fatti dando maggiore estensione a' suoi scritti, e ripetendo le osservazioni anatomiche nelle quali tant'oltre avea progredito che di continuo riceveva i lavori di molti (19), che a gara desideravano il suo avviso, ed il suo giudizio in materie che all'Anatomia concernevano.

Avendo il Cigna acquistato fama di grande anatomico il 30 di agosto del 1770 fu dal Re nominato a Professore straordinario di Anatomia (20), quindi Professore ordinario, quando nel 1775 cessò di vivere il Professore Bruno.

Gli elementi di Anatomia fisiologica che dettava a' suoi studenti presentavano colla maggiore concisione e chiarezza tutta quanta la scienza che se ne aveva, e sono ancora in oggi cercatissimi e proposti come un compendio esatto delle dottrine anatomiche e fisiologiche di quel tempo.

Non solamente aveva il Cigna grandissima riputazione nelle cose fisiche ed anatomiche e nella medicina teorica;



ma ancora nella pratica medica quantunque poco la esercitasse per non distrarsi dagli altri studi. In fatti nel 1778 essendo stato con grande violenza sorpreso il Beccaria dal suo solito morbo emoroidale, confidando moltissimo nei lumi clinici del Cigna, messe in dimenticanza le passate differenze, lo pregò di volersi unire al suo Medico ordinario (Bernardi) nella cura della sua malattia. Corrispose il Cigna cordialmente all' invito del suo maestro, e questa riconciliazione rappattumò ben presto il Beccaria col Saluzzo, e col de la Grange de' quali sarebbe stato Collega con titolo di distinzione, se gli sforzi dei Medici e dei Chirurghi i più accreditati avessero potuto vincere la violenza del suo morbo.

Fino al 1779 attese il Cigna unicamente alla coltura delle scienze; ma allora più che mai conoscendo la necessità di avere una compagna che prendesse continua cura della sua salute, e delle domestiche faccende che aveva sempre trascurate, si ammogliò con Teresa Prandi figlia del Medico del Principe di Carignano, la quale corrispose compiutamente alla sua aspettazione (21).

Il Cavaliere Lorgna aveva in quel tempo istituito la Società Fisica e Matematica Italiana per riunire in un corpo i più dotti Italiani di qualunque parte dell' Italia essi fossero. I fondatori della Società Filosofico-matematica di Torino furono tosto alla medesima aggregati; onde nel primo catalogo de' Socj stampato in principio del terzo volume delle Memorie pubblicato a Verona nel 1786 trovasi il Conte

Giuseppe Angelo Saluzzo Presidente della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Ludovico de la Grange Direttore dell'Accademia Reale delle Scienze di Berlino, e Giovanni Francesco Cigna Professore di Anatomia nella Regia Università di Torino (22).

La grande rinomanza che il Cigna aveva acquistata fra i dotti de' paesi esteri accrebbe anche la sua generale stima nel Piemonte, e n' ebbe onorificentissimi attestati coll'essere stato nominato ai 26 di novembre dell'anno 1784 Consigliere sovranumerario nel Magistrato del Protomedicato, e poi Consigliere effettivo nello stesso Magistrato con Regie Patenti dei 5 febbrajo 1790 (23).

Mentre coi lavori assidui, per quanto lo permetteva la sua salute, procurava di conservare la riputazione che erasi acquistata, s'indebolivano sempre più le sue forze, e distratto dalle cure de' suoi impieghi (24), non potè dare compimento a molte ricerche che avvolgeva in mente, finchè ebbe speranza di prostrarre la sua languente vita; la quale come conobbe essere presso che giunta al suo termine abbandonò tutte le terrestri cure per trovare il maggiore dei sollievi nella nostra Santa Religione, coi conforti della quale tranquillamente finì di vivere il dì 16 luglio del 1790.

Era il Cigna di mezzana statura con ossa e testa grosse, occhi vivaci e larghi, in società soventi volte faceto, pieno di quella bonarietà, che è dote propria per l'ordinario degli uomini sommi nelle scienze e nelle arti (25).

## NOTE.

(1.) Sin da quando fui nominato Segretario della Classe delle Scienze fisiche e matematiche ( nel 1804 ) aveva io divisato di scrivere l'elogio del D. *Cigna* fondatore dell' Accademia , e primo Segretario della medesima ; nello stesso tempo però riflettei che l'elogio di un Accademico insigne , qual egli fu , non deve solamente riferire le cose da lui fatte , ma ancora presentare lo stato delle scienze da lui coltivate al tempo ch' egli prese a studiarle : e passo passo mostrare quali progressi ciascheduna abbia fatto per l'opera sua.

Tale disamina vidi convenirsi tanto riguardo al *Cigna* , quanto a'suoi Colleghi il *Saluzzo* e il *de la Grange*, quando il tempo ne avesse privata la Società.

Distratto da mille occupazioni , tutte scientifiche sì , ma ben lontane dalle ricerche che si richiedevano per iscrivere l'elogio del *Cigna*, dalle giornaliere lezioni scolastiche , dal corso di pubbliche sperienze , da una estesissima corrispondenza letteraria ( che si estendeva da *Teheran* nella Persia sino a *Charles-Town* nella Carolina meridionale ) da numerosi scritti ( più di cento e venti ) pubblicati per fare progredire la pubblica istruzione , dagli impegni

delle associazioni accademiche , ( più di venticinque straniere ) , dalle molte commissioni scientifiche del Governo , finalmente dalle occupazioni accademiche nella qualità di Segretario , non ebbi mai ozio bastante per porre mano all'opera di dettare l'elogio del *Cigna*.

Quando poi le circostanze me lo avrebbero permesso , i miei nervi si trovarono talmente indeboliti dagli studi fatti , e da cagioni morali , che dovetti prescindere per allora dall' ideato progetto , non senza speranza di potervi attendere altra volta ; ora vedendo crescere coll' età la mia debolezza , accresciuta ancora dagli studi , dai quali non so astenermi , disperando di potere scrivere l'elogio quale lo aveva divisato , e vedendo ormai passata una generazione senza che alcuno ne abbia fatto parola , e perdersi così le inedite notizie col tempo , ho pensato di lasciarne all' Accademia queste memorie per chi vorrà o al *Cigna* soltanto , od ai tre fondatori della Società filosofico-matematica Torinese consecrare un monumento che alla loro dignità si convenga.

Del Conte *Saluzzo* già l' Accademia possiede il forbito elogio scritto dal



Collega *G. Grassi*, (a) ed in poche pagine ne ho già stampato nel tomo XIV dei nostri atti i principali titoli scientifici all'ammirazione ed alla riconoscenza dell'Italia non che del Piemonte; e riguardo al *de la Grange* ho letto all'Accademia la notizia della sua vita e delle sue opere un mese dopo la sua morte nell'adunanza dei 3 maggio 1813, e molti ne sono già gli elogi stampati.

(2.) *Vico* antichissima terra siccome ebbe gran parte nella fondazione della Città di *Mondovì*, nel cui suolo è stata edificata, così fece un corpo solo colla stessa Città, onde le famiglie di *Vico* erano cittadine, ed avevano parte nel pubblico maneggio della Città del *Mondovì*; ma in fine del secolo XVII, d'ordine sovrano ne fu staccata, e fa ora comune a parte (b).

(3.) Dal libro rosso della Città (così si chiama volgarmente una raccolta d'instrumenti autentici intitolata *Jura*

*Civitatis Montis regalis*), e da un altro cartolare autentico detto *Liber instrumentorum* si sono estratte le seguenti notizie riguardanti la famiglia *Cigna*.

1298 12 maggio. Nell'istrumento d'enfiteusi della grande bosaglia detta di *S. Stefano* fra i Consiglieri del Comune di *Mondovì* si legge: *Lambertus Cigna*.

1305 5 febbrajo. Fra i Consiglieri: *Jacobus Lamberti Cignae*.

1396 12 luglio. Nell'istrumento di dedizione della Città di *Mondovì* ad *Amedeo di Savoia Principe d'Achaja* si trova *Henricus Cigna* fra i consiglieri di credenza chiamati *Consilarii et Crendarii*.

1493 23 settembre  
*Marchio Cigna*.

1506 20 novembre  
*Paolo Cigna*.

1508 6 gennajo  
*Melchior Cigna*.

} Consiglieri  
della Città.

(a) Elogio storico del Conte *Giuseppe Angelo Suluzzo di Menusiglio* scritto da *Giuseppe Grassi*. Torino, dai tipi di *Domenico Pane* 1813.

(b) » Vedi *Memorie storiche della Chiesa Vescovile di Montereale* in » *Piemonte* dall'erezione del Vescovato sino a' nostri tempi raccolte da » *Don Gioachino Grassi Cavaliere*

» della Sagra Religione de' Ss. Maurizio e Lazzaro Canonico ecc Torino » MDCCXXXIX. Nella Stamperia Reale » Tomo I. Discorso preliminare, e » pag. 268 e seg. Dissertazione di Luca » *Luibera Priore di S. Pietro di Vico* » sopra l'origine della Città di *Mon-* » *dovì* ecc.

1625 24 giugno.	} Sindaci della Città.	Grassi di Santa Cristina = Dell' Università degli studi in Mondovì, Dissertazione di Gioachino Grassi di Santa Cristina Canonico della Cattedrale. Mondovì 1804. Per Gianandrea e figli Rossi = fra i Dottori Collegiati delle diverse facoltà si trovano.
Costantino Cigna		
1638 21 dicembre.		
Gio. Stefano Cigna		
1657 21 dicembre.	} Consiglieri della Città.	1617. Cigna Benedetto Dottore Collegiato di Teologia. 1614. Cigna Benedetto } Dottori Collegiati di 1638. Cigna Alessio } Giurisprudenza. 1641. Cigna Gio. Gu- glielmo }
Andrea Cigna		
1661 4 febbrajo.		
Vincenzo Cigna fratello di Andrea		
1669 4 novembre.		
Pietro Cigna		
1675 4 aprile.	} Professore di Notomia	E fra i Dottori Collegiati di Filosofia e medicina, oltre i summentovati Costantino Avo, e Filippo Padre del Professore di Notomia.
Costantino Cigna avo del Professore di Notomia		

Ebbe questi due figliuoli, cioè Giovanni Francesco che fu prima Capitano nel Reggimento di Saluzzo, e poscia Comandante del forte d'Issiglio, e Filippo che fu Dottore Collegiato di medicina nell' Università del Mondovì nell' anno 1646.

Nel libro del Canonico Cavaliere

In Fico in casa dell' Avvocato Aimaro sotto il ritratto d' un Ecclesiastico leggevasi questa Iscrizione.

- » Beoedictus Cigna J. U. D. Coll. Patritius Montisregalis
- » Laurentiae conjugis Jo. Jacobi Aimari patruus
- » Vir Sacerdotali pietate doctrina fama nec uon pro componendis
- » Sabaudiae domus dissidiis apud S. Sedem legatus clarissimus
- » Qui Salutiarum Episc. designatus aetatis suae anno 38
- » Invidorum fraude sublatu omnibus sui desiderium reliquit 1636.

In casa Cigna sotto il ritratto d' un altro Ecclesiastico, coll' impresa della famiglia ornata di fiocchi si leggeva.

- » Johannes Baptista Cigna civis Montisregalis
- » Archipresbyter Rhéatinensis Cathedralis J. U. Doctor
- » Obiit Romae anno D. 1532 aetatis suae 56.

(4.) Riguardo alla famiglia *Beccaria* vedi le Memorie storiche del sopracitato Cav. D. *Gioachino Grassi*, ed il tomo II ossia i *Documenti* concernenti le medesime Memorie.

(5.) Quando per la morte del Padre *Garro* si rese vacante la cattedra di Fisica nella R. Università fu proposto al Re di chiamare da *Roma* il Padre *Francesco Jacquier* autore di un corso compiuto di Filosofia, e di commentarii ai principj matematici della Filosofia naturale del *Newton*, opere amendue assai lodate a que' tempi. Il Marchese *Giuseppe Morozzo* Riformatore degli studi persuase il Monarca a preferire il Padre *Giambattista Beccaria*, che in *Roma* eziandio professava pubblicamente la Filosofia, e già si era procacciata una distinta riputazione: ciò che diede occasione ai protettori del *Jacquier* di andar dicendo che l'amor di patria avea accecato il *Morozzo* nel fare che fosse preferito il discepolo suo concittadino al Maestro universalmente conosciuto, e stimato. Appena giunto in *Torino* il *Beccaria* non mancò il *Morozzo* di rappresentare al medesimo quale obbligo egli avesse di giustificare con tutte le sue forze la preferenza di cui era stato dal Re favorito; e poco tempo dopo, divulgando i giornali le prime scoperte di *Franklin* sull'elettricità, non lasciò di animarlo a coltivare con calore questa parte delle

scienze fisiche, non guardando a spesa veruna per provvedere l'occorrente alle molteplici sperienze che avesse in animo di fare, ed acquistarsi così un nome che sopravanzasse quello del suo competitore.

Come abbia corrisposto il *Beccaria* all'invito del *Morozzo*, è chiaro dall'altissima riputazione che acquistò, e dalle *Memorie istoriche intorno gli studi del Padre Giambattista Beccaria delle scuole pie Professore di Fisica sperimentale nella Regia Università di Torino ecc.* stampate a *Torino* del 1783 dal Professore *Eandi* che le dedicò al signor Conte *Prospero Balbo* Dottore del Collegio dei Giureconsulti, e Consigliere della Città di *Torino*, al quale ancor giovine il *Beccaria* (morto nel 1781) ha legato i suoi manoscritti.

(6.) Nel loro frequente conversare il *Cigna* ispirò nel *de la Grange* l'amore per le scienze fisiche, onde nei commentarii stampati in principio del 1.<sup>o</sup> volume della società trovansi soventi volte menzione delle specolazioni fisiche del *de la Grange*, e questi mosse il *Cigna* a studiare le matematiche, del che sono una non dubbia prova quattro quaderni scritti di proprio pugno del *Cigna*, che si trovarono tra le sue carte, nei quali è compendiato il corso di matematica del *Wolfio*.

(7.) » Vedi Vita di *Alessandro Vittorio Papacino D. Antoni Comau-*

» dante dell' Artiglieria , e Tenente  
 » Generale, scritta da *Prospero Balbo*  
 » l' anno M.D.CCXCII. Mémoires de  
 » l'Académie des Sciences de Turin  
 » tome XV.<sup>e</sup> 1805 pag. 290.

(8) » Les élèves qui , pendant les  
 » dernières années du cours , se dis-  
 » tinguaient dans la faculté qui les  
 » avait admis , étaient ordinairement  
 » nommés , dans la dernière année ,  
 » répétiteurs extraordinaires des élèves  
 » de la première. Cette place qui va-  
 » lait quelques distinctions honorifiques  
 » et quelques agrémens venant à va-  
 » quer , était convoitée par les meil-  
 » leurs élèves , soit pour l'honneur ,  
 » soit parce que c'était parmi ces ré-  
 » pétiteurs extraordinaires qu'on choi-  
 » sissait les répétiteurs ordinaires élus  
 » parmi les gradués dans leurs facultés  
 » respectives. Les répétiteurs étaient  
 » donc l'élite des talens les plus dis-  
 » tingués , qui s'étaient avantagense-  
 » ment fait connaître dans le cours de  
 » plusieurs années . . . Cette échelle  
 » donnait à la jeunesse la plus grande  
 » émulation , et fournissait au Gouver-  
 » nement des hommes très-distingués  
 » pour les chaires tant des provinces  
 » que de l' Université , et pour les  
 » différens emplois de la société. Notice  
 » sur la vie et les ouvrages d'Eandi.  
 » Par A. M. Vassalli-Eandi. Mémoi-  
 » res de l'Académie des Sciences de  
 » Turin Tom. XII. 1803. ( an XII )  
 » pag. VIII e seq.

(9) JOHANNES FRANCISCUS CIGNA MON-  
 REGALENSIS PHIL. ET MEDICINAE DOCTOR  
 ut in amplissimum Medicorum Collegium  
 cooptaretur publice disputabat in Regio  
 Taurinensi Lyceo facta cuilibet post sex-  
 tum argumentandi facultate anno 1757  
 die 14 aprilis hora nona matutina. Au-  
 gustae Taurinorum ex Typographia Re-  
 gia in 4.<sup>o</sup> = EX PHYSICA de electricitate  
 = EX ANATOMIE de utero = EX INSTITU-  
 TIONIBUS MEDICIS de irritabilitate = EX  
 MATERIA MEDICA de camphora = EX TEO-  
 RICA uteri inflammatio = EX PRAXI de  
 nonnullis praecipuis difficultatibus quae in  
 cognitione et curatione februm occurrunt.

(10) *Memorie istoriche intorno gli  
 studi del Padre Giambattista Beccaria  
 sopracitate , pag. 118.*

(11) OBSERVATIONS SUR LA PHYSIQUE ,  
 SUR L'HISTOIRE NATURELLE ET SUR LES  
 ARTS avec des planches en taille douce.  
 PAR M. L'ABBÉ ROZIER , de plusieurs  
 Académies etc. août 1790. Tome  
 XXXVII pag. 154. Extrait d'un ou-  
 vrage de MAYOW sur les airs ; par M.  
 DELAMÉTHÉRIE : Tractatus quinque Me-  
 dico-physici , quorum primus agit de  
 Sal-nitro et Spiritu nitro aereo : secun-  
 dus de Respiratione : tertius de Respi-  
 ratione foetus in utero et ovo : quartus  
 de Motu musculari et spiritibus nina-  
 libus : ultimus de Rachitide ; studio Joh.  
 MAYOW , L. L. D. etc. Medici nec non  
 Coll. oam. anim. in Universit. Oxon.  
 Socii. Oxonii , e theatro Sheldoniano  
 anno Domini M.D.C.LXXIV.

Tra le scoperte riferite dal *Delaméthrie* e coi disegni degli instrumenti di *Mayow*, trovansi quelle della diminuzione del volume nell'aria nella quale si fa la combustione; che l'aria residua non è più atta a mantenere la combustione; che l'aria dellogisticata di trent'anni sono, l'aria del fuoco di Scherle, trova i nel nitro del quale è parte: che quest'aria è la sola atta a mantenere la combustione, e la respirazione; che in questa il sangue la assorbe; che quest'aria del nitro ne è il principio acidificante; che l'accrescimento del peso nella calcinazione dei metalli è dovuto a quest'aria.

Molte altre scoperte moderne trovansi già nella cita a opera del *Mayow*.

(1.) Per qualche difetto nell'apparecchio credevano di avere veduto che la combustione e la vita degli animali si possono lungo tempo mantenere nell'aria chiusa; ma i rimproveri del Maestro intorno all'inesattezza nello sperimentare li fecero riedere, conobbero l'errore per via di nuove e più accurate sperienze su tale soggetto, e ne pubblicarono i risultamenti.

(13) Al *Bertrandi* Professore di Chirurgia nella Regia Università, e primo Chirurgo del Re CARLO EMANUELE III, che lo aveva in grandissima stima, va debitore il Piemonte di molte utili istituzioni e parti olarmente della scuola Veterinaria, essendo a suggerimento del *Bertrandi* che il Re mandò il *Brugnone* a studiare tale arte a Lione, e della scuola delle levatrici, che tenne per qualche tempo il *Bertrandi* in persona, e determinò gli esami a cui dovevano andar soggette per ottenere la facoltà di esercitare l'ostetricia (a).

L'*Allioni* destò in Piemonte l'amore delle scienze naturali, e formò un museo per quel tempo assai ricco in produzioni dei tre regni, onde non solo la Botanica, ma ancora la Zoologia, e la Mineralogia ebbero in Piemonte distinti coltivatori; e riguardo all'ultima sappiamo quanto i essa si sia distinto il Conte *Morizzo* (b) e co'suoi proprii studi, e coll'aver promossi i viaggi mineralogici del Cavaliere *Napione*, ed animato il Cont. *Felice Semmarino della Motta* ad applicarvi l'animo, come fece finchè non fu da altre occupazioni distratto, e dal

(a) Vedi Piemontesi illustri Tomo V Torino 1787.

*Elogio storico del Chirurgo Ambrogio Bertrandi*, del Conte Bava di S. Paolo, pag. 281, e seg.

TOM. XXVI.

(b) *Fedine la vita scritta da' Conte Prospero Balbo*, *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana* tom. XV pag. LXX.



seleciata di Torino trasse molte pietre delle quali ne faceva vaghe minuterie (a).

(14) Ebbe a maestro di Rettorica il valente Professore *Gian-Bernardo Vigo*, il quale ne' suoi poemi *Cortex peruvianus*, *Tubera terrae*, *Cannabis*, *Marmora Tiurinensia*, *Charta ejusque conficiendae ratio*, etc. provò quanto chiaramente ed elegantemente, anche di cose ignote agli antichi, si possa scrivere nella lingua del *Lazio*.

(15) *Histoire de l'électricité traduite de l'Anglais de Joseph Priestley avec des notes critiques*. Paris 1771. Tom. II pag. 50. » M. Symmer produit un grand nombre d'expériences curieuses, et il en enfère l'existence probable de deux fluides électriques non pas indépendans, mais toujours coexistans, et agissant d'une manière opposée l'un à l'autre.

» La première suite de ses expériences est fort-remarquable, mais il ne fait guère qu'en rapporter les faits. Elles furent variées et poussées plus loin par *Jean François Cigna* qui les a expliquées aussi d'après

» les principes de la théorie du Docteur *Franklin*, quoiqu'il pensât qu'aucune des expériences qui avaient été faites jusqu'alors n'étaient décisives en faveur ni de l'une ni de l'autre de ces hypothèses.

(16) Quando il *Cigna* lesse negli Opuscoli di Milano (Scelta di Opuscoli interessanti, nuova edizione. Milano 1781. Tomo I pag. 311 e 342) le lettere del *Volta* al *Priestley* sopra la sua scoperta dall' Elettroforo si lagnò altamente con tutti gli amici, e scrisse alcune note nella ristampa che si faceva a Torino della *Scelta di Opuscoli interessanti* (volume nono. Torino 1775. Presso Giammichele Briolo), e due lettere scientifiche l'una al *Priestley*, e l'altra al *de la Grange* per provare che l'Elettroforo del *Volta* non era altro che il suo apparecchio moltiplicatore dell' elettricità stampato nel tomo III della Società Reale di Torino.

Analoga all' opinione dal *Cigna* manifestata in queste due lettere inedite, cortesemente comunicatemi da *S. E.*

---

(a) Vedi *Réflexions sur tous les ouvrages publiés et inédits du Docteur Charles Allioni avec notices historiques concernant sa vie et plusieurs autres établissemens littéraires en Piémont*. Par le Docteur Michel Buniva Professeur

émérite de Médecine de l'Université Royale de Turin, pensionnaire de S. M. et membre de plusieurs Sociétés Savantes. Turin chez *Felix Galletti*. Stampate nell' anno 1816 senza data.

i' sig. Conte Prospero Balbo Presidente dell' Accademia , è quella dei Professori Beccaria ed Eandi come appare dall' annotazione XXIX alle *Memorie storiche intorno gli studi del Padre Giambattista Beccaria* sopra citate pag. 132.

» In questo scritto che fu poi inserito nel vol. III Miscell. Taurin. si trova la scoperta dell' Elettroforo, » e principalmente al capo III n. 50. » Questa scoperta e da collocarsi nel numero di que' *donaria* di Bacone » *sparsa casu inter homines*, in cui » s' avvenne *experientia sagaci* il Dottore Cigna; rispetto alla qual invenzione si è trovata ne' manoscritti del Padre Beccaria una cartuccia scritta di propria mano, di cui mi fu cortesemente rimessa copia dal sig. Conte Balbo per inserire in questo luogo.

» Questo è l' Elettroforo espresso dal nostro Dottor Cigna nel nastro e nella lamina di piombo isolata; » espresso da me nelle funzioni di una o di due lastre di cristallo ecc. » La perpetuità che il sig. D. Alessandro (Volta) ha attribuita all' Elettroforo suo non è che una maggiore durezza dell' elettricità impressa nella resina.

Io ignoro se il Volta avesse, o non avesse notizia delle sperienze del Cigna, nelle quali trovai il principio dal quale

si deduce l' Elettroforo; ma so anche per propria replicata esperienza che non basta il dare il fondamento di una teoria, o di un apparecchio per ottenerne il nome, il quale sovente non si dà al primo scopritore, ma bensì a chi ne rende notissima la scoperta.

(17) *Memorie storiche intorno alla vita ed alle opere di Michele Vincenzo Giacinto Malacarne da Saluzzo Anatomico e Chirurgo, raccolte da suo figlio Vincenzo Costantino da Acqui Medico e Chirurgo. Padova 1819 pag. 17.*

» Qui cominciò l' amicizia di Michele Vincenzo (Malacarne) col Cigna da Mondovì, ripetitore di pratica medica nel collegio, poi medico assistente nello spedale, amatissimo anch' esso dei lavori anatomici, così che è facile l' immaginarsi, con quale impegno, e con quanta emulazione questi due ardenti giovani intraprendessero con nobile gara le più astruse preparazioni. Di fatti toccò questa volta al Cigna di pagare il solito tributo alla soverchia indefessitudine con una gravissima malattia, nella quale l' assistette l' amico e collaboratore con tutto l' impegno ed attività, lavorando durante essa per il Cigna alla soluzione del problema dell' *Arveo*: » *Perchè soglia marir il bambino nel parto quando è preceduto dal cordone ombelicale.*

(18) *Memorie istoriche intorno* suo genitore, fu moglie del Capitano gli studi del Padre *Giambattista* d'Artiglieria sig. Cavaliere *Barilis* di *Beccaria* sopra citate, pag. 53 e Crescentino.

La vedova e le due figlie del *Cigna* ebbero uno speciale contrassegno della Regia beneficenza dal RE VITTORIO AMEDEO III, che con suo biglietto del 25 novembre 1791 accordò una pensione annua di lire trecento alla vedova, reversibile dopo essa alle due figlie metà per ciascuna, in considerazione dei distinti servigi prestati dal Dottore *Gianfrancesco Cigna*, e per le incessanti lodevoli cure ed attenzioni dal medesimo datesi pel progresso, e pei vantaggi della Reale Società, stata in appresso eretta in Accademia Reale delle Scienze.

(22) Nel primo catalogo dei membri della *Società Italiana* tra i Socii attuali, oltre i nomi dei tre fondatori dell'Accademia di Torino trovansi pure tre altri Piemontesi, *Carlo Barletti* delle Scuole pie, Professore di Fisica, generale nella R. I. Università di Pavia, *Vincenzo Malacarne* Direttore delle Regie Terme Acquesi, e Chirurgo maggiore del Reale presidio di Torino, e Conte *Carlo Lodovico Morozzo* Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Vice-presidente dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino.

(23) Un particolarissimo attestato di stima, e di affezione ebbe il *Cigna*

(19) *Memorie storiche intorno alla vita e alle opere di Vincenzo Malacarne* ecc.

» Pag. 29. Aveva *Michele Vincenzo* » in quell'anno esteso dodici Esercizioni anatomiche di encefalotomia, » e comunicatele manoscritte al Dottor *Cigna* con alcune nuove osservazioni sul cervelletto umano.

» Pag. 60. Intraprese l'anatomia più » minuta del cervello umano, e scopri » molte cose, che gli parvero essenziali e nuove nel cervelletto, le quali » comunicò col Dottor *Cigna*.

» Pag. 67. Di questa e di altre bellissime osservazioni diede notizia al *Cigna* e al veterinario *Brugnone*.

(20) Nello stesso anno fu nominato Medico assistente allo Spedale maggiore di S. Giovanni, ove poco tempo dopo soffersse altra gravissima malattia.

(21) Il *Cigna* ebbe da essa due figliuole *Delfina* e *Luigia*. La vedova *Teresa Cigna* sposò in seconde nozze il Cavaliere *Roccati* Colonnello d'Artiglieria, e le figlie si maritarono. *Delfina* col sig. *Bertini* proprietario di civile condizione, e la seconda cioè *Luigia*, che per la sua tenera età e la sua vivacità singolare era la delizia dell'infermo e sempre più languente



il dì 28 giugno 1789 quando il Re VITTORIO ANEDEO III venne la prima volta all' Accademia accompagnato dai cinque *Principi Reali* suoi figliuoli ad onorarne la prima adunanza pubblica. Trovandosi il *Cigna* debole a segno che appena poteva reggersi col bastone, in vece di prender posto tra gli Uffiziali dell' Accademia in capo della tavola, andò a porsi in fondo della medesima.

Terminata la sessione mentre il Re si avviava a vedere l'attigua Biblioteca, S. A. R. il Principe di Piemonte visto il *Cigna* in fondo della tavola ebbe la degnazione di recarsi da lui a dimandargli affettuosamente nuove della sua salute, quindi raggiunse il sno *Augusto Genitore* nella Biblioteca dell' Accademia.

(21) *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin. Pour les années 1770 1773.*

» Pag. 97. *Johannis Francisci Cigna de electricitate. Quum muneris mei ratio jam longius a generali physica me avocet, et temporis mei partem anatome, partem aegrorum cura sibi vindicet, constitui subsequis horis ex adversariis meis ea depromere, quorum perficiendorum jam pauca spes superesset . . . Taurini die 13 julii 1773.*

» Pag. 109. *Johannis Francisci Cigna de respiratione.* Pag. 110. Me-

» liora fortasse, certioraque fuisset allaturus, si varia quae in hanc rem mihi tentanda proposueram experimenta exequi potuisssem, sed aliis aliisque curis distractus, usque adeo distuli, dum *Regin Societas* quintum hoc volumen prope editura esset. Quare occasionem captare constitui meditationes has, quoad fieri potuit emendatas, evulgandi, accuratiora imposterum, et ex propriis experimentis et ex doctorum virorum animadversionibus allaturus. »

L'ultimo scritto pubblicato dal *Cigna* trovasi nel tomo IV delle *Memoirie di Matematica e Fisica della Società Italiana. Verona 1788 pag. 150*, ed è = *Riflessioni ed esperienze sulla pretesa castrazione delle pollastre e sulla fecondazione dell' uovo. Del sig. Giovanni Francesco Cigna Professore di Anatomia nella Regina Università di Torino* = In principio del medesimo in questa guisa parla della sua poca salute.

» Li gravi sconcerti di mia sanità non avendomi sin' ora permesso di adempiere i miei doveri verso questa rispettabilissima Compagnia, che mi ha sì graziosamente prevenuto col compartirmi il distinto onore di annoverarmi fra gl' illustri suoi membri; nè potendo per ora offrirle, siccome avrei desiderato, il ben giusto tributo di qualche letterario

» lavora frutto di più profonde ricer-  
 » che , ho pensato di presentarle que-  
 » ste poche esperienze e riflessioni ,  
 » quali mi ha permesso lo stato at-  
 » tuale della mia cagionevole salute in  
 » tenue contrassegno della mia buona  
 » volontà , o della perpetua mia ri-  
 » conoscenza. »

(25) È cosa naturale che chi non  
 ha bisogno d'ingannare non usi quel  
 sussiego , detto volgarmente impostura,  
 che fu definito un mistero del corpo  
 per coprire i difetti dello spirito . poi-  
 chè non si odia la luce se non da chi  
 ha bisogno di nascondersi.

Non finirò queste note senza ren-  
 dere grazie a chi cortesemente mi fa-  
 vorì notizie per iscrivere queste Me-  
 morie , e specialmente a S. E. il sig.

Conte *Prospero Balbo* , al degno Nipote  
 del Cigna Abate *Gioanni Francesco Za-*  
*vatteri* Professore onorario di Filosofia ,  
 e Membro del Collegio delle Arti nella  
 Regia Università di Torino, al Dottore  
*Francesco Antonio Canaveri* Professore  
 emerito di Medicina nella stessa Uni-  
 versità , ed al sig. *Guetano Salvaja* del  
 Mondovì Segretario del Consiglio delle  
 Regie Finanze.

La lettura delle precedenti Memorie  
 concernenti alla vita del Cigna ricordò  
 alla Classe la deliberazione presa più  
 anni sono dall' Accademia di porre il  
 busto di lui in marmo nella sala delle  
 adunanze ordinarie , a lato di quelli  
 del *Saluzzo* e del *de la Grange* , e rin-  
 crebbe alla Classe che tale cosa non  
 fosse ancora eseguita , e deliberò che lo  
 sia sollecitamente.

## CATALOGO

### DELLE OPERE STAMPATE DI GIANFRANCESCO CIGNA

#### *Nei volumi dell' Accademia.*

De iis quae in societate acta	<i>Tom. pag.</i>	et affnibus pnenomenis	<i>Tom. pag.</i>
sunt . . . . . »	I 1	nonnullis . . . . . »	II 143
De analogia magnetismi et		De causa extinctionis flammæ	
electricitatis . . . . . »	I 43	et animalium in aere inter-	
De colore sanguinis experi-		clusorum . . . . . »	II 168
menta . . . . . »	I 68	De novis quibusdam experi-	
De motibus electricis experi-		mentis electricis . . . »	III 31
menta . . . . . »	II 77	De electricitate . . . »	V 97
De frigore ex evaporatione		De respiratione . . . »	V 109

*Nelle Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana.*

Riflessioni ed esperienze sopra la      sulla fecondazione dell'uovo. Tomo IV  
pretesa castrazione delle pollastre, e      pag. 150.

*Nel giornale = Observations sur la Physique, et sur  
l'Histoire naturelle sur les Arts etc. Par M. l'Abbé Rozier etc.*

Lettre de M. Cigna, de l'Académie      sur un phénomène de l'Ébullition.  
de Turin, à l'Auteur de ce Recueil,      Tome III février 1774 pag. 109.

Alle opere stampate dal Cigna appartengono pure le Tesi d'Anatomia raccolte insieme col titolo: Cl. *Johannis Francisci Cigna*, Medicinæ et Anatomies Professoris Regii theses anatomicae singillatim editae in usum disputationum Academicarum in Regio Taurinensi Archigymnasio.

## CATALOGO

### DELLE OPERE INEDITE DI GIANFRANCESCO CIGNA.

- |  |  |
|--|--|
| 1 Necessitas Osteologiae ad reliquam Anatomem et ad Physiologiam.  | alia lanionum peritiam vix superauit, Anatomem reliquam Philosophorum ingeniis exercendis potius, quam Medicis informandis aptam esse. |
| 2 De Physiologiae dignitate, quae praecipuus Anatomies finis.  | 7 De generatione hominis adversus praexistentiam germinum etc.   |
| 3 Ad experimentum Stenonis de Paralyti ex ligata arteria.  | 8 De causa mortis ex mephitide.  |
| 4 De partium humani corporis consensione.  | 9 De hypothesi Equitis Rosae.  |
| 5 De gangliorum in uervis utilitate ac munere  | 10 De ciborum coctione, ubi expendantur experimenta Spallanzanii.  |
| 6 Apologia adversus obtrectatores asserentes, Medicinam totam in usu, atque exercitatione positam esse, et si viscerum loca excipias, ac pauca | 11 De arteriarum praesertim minimarum vi musculari.  |
|  | 12 De calore animali.  |
|  | 13 De usu lymphaticorum vasorum.   |

- 14 *Semisthalianorum recentium doctrinae disquisitio.*
- 15 *De pulsibus.*
- 16 *Esame critico della teoria di Mylord Mahon delle atmosfere elettriche.*
- 17 *Animadversiones in Cullenii theori-  
am scorbuti, et epilepsiae.*
- 18 *Riflessioni sul trattato dell'aria, e  
del fuoco di Scheele.*
- 19 *Riflessioni sulle arie fattizie, sul  
fuoco, sulla luce, sull'analogia del  
fuoco elettrico, e comune.*
- 20 *Animadversiones in tractatum Ma-  
gellani de igne elementari.*
- 21 *Animadversiones in Bergman de  
caussa suffocationis ex sublata respi-  
ratione.*
- 22 *Riflessioni sulle esperienze del Troja  
concernenti gli animali nelle varie  
arie fattizie.*
- 23 *Varii consulti medici su diverse ma-  
lattie.*
- 24 *Lettera sopra l'elettricità, e sulla  
pretesa virtù magnetica della tor-  
pedine.*
- 25 *Parere scritto a nome della Società  
Reale filosofico-matematica sopra i  
pericoli che si possono temere nello  
scavare e vuotare i sepolcri di S. Do-  
menico in Malta, in risposta alla Me-  
moria trasmessa da S. A. Em. il signor  
Gran Mastro di Malta a S. E. il signor  
Conte Perrone, Ministro di Stato per  
gli affari ioterni, in data di Malta  
8 settembre 1780.*
- 26 *Lettre à M. Priestley sur la décou-  
verte de l'Electrophore.*
- 27 *Lettre à M. de la Grange sur le  
même objet.*

# MEMORIE

DELLA CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE.



# NOUVELLES CONSIDÉRATIONS

SUR LA THÉORIE

DES PROPORTIONS DÉTERMINÉES DANS LES COMBINAISONS ,

ET SUR

LA DÉTERMINATION DES MASSES DES MOLÉCULES DES CORPS

PAR LE CHEVALIER AVOGADRO

---

*Lu à la séance du 14 février 1821.*

---

**J**e crois avoir été des premiers à signaler l'application qu'on pouvait faire du principe découvert par M. Gay-Lussac de la simplicité du rapport des volumes dans les combinaisons des substances gazeuses , à la détermination des masses relatives des molécules des corps , et en général à la théorie des proportions déterminées dans les combinaisons , que Dalton avait déjà établie , et cette considération m'avait conduit à une hypothèse sur la constitution des gaz , qui simplifiait beaucoup l'application dont il s'agit , et à quelques lois générales relatives à la constitution des corps composés. ( Voyez mes deux mémoires sur ce sujet dans le journal de physique de Lamethérie , juillet 1811 , et février 1814 ).

TOM. XXVI.

A



Depuis lors les physiciens, et les chimistes se sont beaucoup occupés de la théorie des proportions déterminées, qu'on a aussi appelée théorie *atomistique*, et *stéchiométrique*, et cette théorie est devenue, ainsi que je l'avais prévu, la base de toute la chimie, et la source des perfectionnemens que cette science a reçus de nos jours. M. Berzelius en particulier s'est appliqué à mettre la plus-grande exactitude dans la détermination des masses des molécules, d'après ses propres expériences et les hypothèses qu'il a adoptées, et il vient de rassembler les résultats auxquels il croit devoir s'arrêter, dans l'ouvrage important qu'il a fait traduire sous ses yeux, et qu'il a publié à Paris dans l'année dernière sous le titre d'*Essai sur la théorie des proportions chimiques etc.*

Je me propose dans ce mémoire de revenir moi même sur mes recherches précédentes à cet égard, et d'en faire une espèce de revue comparativement avec les résultats des nouveaux travaux dont je viens de parler, afin de vérifier jusqu'à quel point mes premières vues ont été confirmées ou modifiées, de rectifier les résultats numériques auxquels je m'étais arrêté, d'étendre mes idées à d'autres corps simples ou composés découverts, ou mieux examinés depuis l'époque de mes mémoires cités, en un mot de rassembler dans un seul tableau, et de coordonner avec mes principes les principaux points de la théorie des proportions déterminées, en entrant surtout dans quelque discussion sur ceux de ces points où mon opinion se trouve différer de

celle de M. Berzelius, qu'on peut regarder à juste titre, comme celui des chimistes modernes, qui a le mieu mérité de cette partie de nos connaissances chimiques.

Ce sujet appartient à proprement parler à la chimie, et pourrait paraître en quelque sorte étranger à la physique proprement dite, qui a toujours fait l'objet principal de mes études; mais indépendamment de ce que l'hypothèse sur la constitution des gaz, qui en fait une partie essentielle est réellement du ressort de la physique, la détermination particulière, même de la masse des molécules des différens corps, a une si étroite connexion avec plusieurs points appartenans à la physique, et en particulier avec quelques uns de ceux dont je me suis dernièrement occupé, que j'ai cru nécessaire de consacrer encore quelques recherches, et d'entrer dans les discussions assez longues qu'entraîne ce sujet, lorsqu'on ne veut pas se rapporter aveuglement aux opinions des différens chimistes, avant de reprendre les travaux dont je viens de parler, à fin de n'avoir plus ensuite qu'à me rapporter aux résultats que j'aurai établi à cet égard, et éviter ainsi des digressions qui m'auraient interrompu la marche.

Je divise ce mémoire en deux parties. Après avoir examiné dans la première les principes généraux de la théorie des proportions déterminées, ou masses des molécules, et de leur influence dans les combinaisons, je passerai dans la seconde, à la détermination particulière des molécules des différens corps simples connus, et à leurs proportions

dans les combinaisons dont ces corps sont susceptibles. Je me bornerai cependant à cet égard à celles de ces substances qui jouent un plus grand rôle dans les phénomènes chimiques ; ce serait dépasser les bornes d'un simple mémoire que de vouloir les parcourir toutes, et d'ailleurs de quelque intérêt que puisse être pour la chimie particulière l'application de la théorie générale des proportions déterminées à certaines substances qui ne se trouvent qu'en petite quantité en nature, et qui interviennent rarement dans les opérations chimiques ordinaires, cette application est pour ainsi dire étrangère à la théorie même, qui fait l'objet de ce mémoire. Quant aux combinaisons je m'arrêterai principalement dans cette 2.<sup>e</sup> partie, de même que dans mes mémoires précédens aux combinaisons binaires, comme étant les plus propres à établir les masses des molécules des corps simples qui intéressent plus particulièrement les chimistes, et les physiciens sans entrer dans des détails et des discussions qui ne pourraient trouver place que dans un traité complet de chimie.

## PREMIÈRE PARTIE.

## CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

*I.<sup>ère</sup> Section. Examen des principes établis dans les mémoires précédens , comparés aux travaux postérieurs des chimistes.*

1. Le premier point que j'avais cherché à établir dans mes mémoires précédens , cités ci-dessus , est que les densités des gaz , et les volumes des corps à l'état des gaz qui entrent dans les combinaisons étaient les seuls termes fixes , et non arbitraires , auxquels on devait s'arrêter , lorsque cela était possible dans l'évaluation des masses relatives des molécules des corps , et de leur nombre dans les combinaisons ; et que lorsqu'on ne pouvait avoir les corps à l'état de gaz , c'était à déterminer par conjecture , d'après les proportions dans les combinaisons , ces mêmes densités , et volumes , que nos recherches devaient tendre.

Celui des chimistes qui m'a paru depuis se rapprocher davantage de cette idée est M. Berzelius : car dans les substances qui sont connues à l'état gazeux il n'admet réellement d'autres proportions définies , que celles présentées immédiatement par les volumes des gaz qui se combinent , et quant aux autres il établit ces proportions sur des analogies avec les premières , qui le conduisent en général aux mêmes hypothèses , que j'ai adopté sur les masses des

molécules des différens corps particuliers. Berzelius observe cependant que *les faits relatifs à la théorie des volumes sont si rares, que d'un très-petit nombre l'on est obligé d'inférer tous les autres*; mais c'est qu'il ne considère ces faits que dans l'oxygène, et l'hydrogène, regardant la simplicité de l'azote comme douteuse, et le chlore comme décidément composé, opinion que peu de chimistes sont disposés à partager actuellement; et ces gaz considérés comme simples ajoutent une assez grande masse de faits relatifs à la combinaison des gaz simples entre eux pour que le nombre total n'en puisse pas être considéré comme très-petit.

Parmi les autres chimistes les uns ( M. Dalton par exemple ) ne paraissent faire aucun cas du principe découvert par M. Gay-Lussac, relativement à la théorie des proportions déterminées, soit qu'ils doutent de sa réalité, soit qu'ils le considèrent comme indépendant, ou n'ayant aucun rapport avec cette théorie. Les autres distinguent la densité, et le volume des gaz qui se combinent de la masse supposée de la molécule, et du nombre de molécules qui entrent dans les combinaisons, de manière que les premiers sont souvent selon eux des aliquotes ou des multiples des seconds; entre ceux-ci je crois qu'on peut compter Gay-Lussac lui même, Thomson, Humphry, Davy etc. C'est ainsi par exemple que quelques uns de ces chimistes regardent la *molécule*, l'*atome*, la *proportion*, ou le *nombre déterminé* de l'oxygène comme étant  $7\frac{1}{2}$  ou 8 fois celui de l'hydrogène, et l'eau comme composée d'une



molécule de chacun de ces deux gaz, tandis que la densité de l'oxygène est 15 ou 16 fois celle de l'hydrogène, et que l'eau est composée d'un volume d'oxygène et deux d'hydrogène.

Mais quant à la réalité du principe de Gay-Lussac, sur la simplicité des rapports entre les volumes, je pense qu'elle est établie sur des faits trop nombreux pour qu'on puisse la révoquer raisonnablement en doute, et sa liaison avec la théorie des proportions déterminées est aussi trop évidente, pour qu'il soit nécessaire de s'arrêter long-tems à la démontrer. En effet puisque les volumes des corps gazeux se combinent en rapport simple, et que les proportions définies ont aussi entr'elles des rapports simples, il doit nécessairement y avoir quelque relation entre les premiers et les secondes, et sans parler encore ici de l'hypothèse très-simple que j'ai proposée sur la nature de cette relation, et sur la constitution des gaz qui en résulte, et que je rappellerai bientôt, cette liaison seule suffit pour que ces deux théories ne puissent être séparées. Mais dès que cette liaison est admise, on voit qu'elle nous offre un moyen de fixer le *nombre proportionnel* dans les combinaisons, qui sans cela serait tout-à-fait arbitraire entre les différens multiples ou aliquotes d'un même nombre. Il est vrai que quelques chimistes ont cherché à définir ce nombre comme étant le *moindre* de ceux que chaque substance présente dans ses combinaisons; mais ce moindre nombre n'est relatif qu'aux combinaisons qui sont à notre connaissance

parmi celles que la nature ou l'art peuvent opérer ; rien ne nous assure qu'une combinaison ne puisse se faire un jour , ou parvenir à notre connaissance avec la moitié , le tiers etc. seulement de ce que nous appelons le *moindre nombre* avant de la connaître. Au contraire les nombres de volumes égaux de gaz qui se combinent , et les densités de ces gaz , ou poids de ces volumes égaux sont déterminés par le fait ; et il est naturel de représenter les masses des molécules , ou les *nombres proportionnels* dans les combinaisons par ces densités , plutôt que par l'un quelconque de leur multiples , ou de leur aliquotes. Je ne vois pas par exemple quelle raison il peut y avoir de dire que le nombre proportionnel de l'oxygène , en prenant pour unité celui de l'hydrogène est 8 , tandis que la densité du premier gaz est 16 en prenant pour unité celle du second : le vrai est que le nombre proportionnel considéré en lui même pourrait être indifféremment 16 , ou l'un des aliquotes de ce nombre 8, 4 etc. , ou l'un de ces multiples 32, 48, 64, etc. ; mais il suffit de dire que le rapport des densités des deux gaz est de 16 à 1 , et qu'en conséquence d'après la théorie des proportions déterminées combinée avec le principe de Gay-Lussac , les combinaisons de ces corps ne peuvent avoir lieu en général que par des aliquotes , ou des multiples de ces nombres ; et la nature même attache à ces nombres un caractère qui nous porte à les choisir de préférence pour représenter les *nombres proportionnels* de ces corps dans leurs combinaisons. Il est vrai que les



nombres proportionnels ainsi fixés ne seront pas toujours les *moindres nombres*, par les quels les combinaisons de ces corps puissent s'opérer, en sorte qu'aucune combinaison ne se fasse par des fractions de ces nombres; mais pour faire jouir au nombre proportionnel de cet avantage, il faudrait le changer toutes les fois, qu'on découvre une combinaison qui exige un nombre plus petit, que celui qu'on aura adopté, pour y satisfaire; et si on ne fait pas ce changement il faut se contenter ou d'admettre des combinaisons par fractions de molécule, ou ramener le nombre admis à la théorie des multiples par quelque supposition de combinaison secondaire entre des composés assujettis à cette théorie, ainsi que l'ont dû faire souvent les partisans mêmes de ce *moindre nombre*. Puis donc qu'en voulant éviter les fractions, il en faut enfin venir à ce dernier parti, il vaut mieux appliquer ces modifications aux densités, et aux volumes des gaz, au lieu de prendre pour base des nombres arbitraires dans la série des multiples, et des aliquotes dont il s'agit. Nous verrons ci-après ce qu'on peut faire à cet égard dans le système des volumes: mais quand on ne voudrait pas se servir de ce moyen, ou qu'on le trouvait insuffisant, il n'y aurait aucun inconvénient à admettre que la molécule telle qu'on l'a adoptée se divise dans certaines combinaisons en deux ou plusieurs molécules partielles, comme la théorie des volumes oblige d'ailleurs à l'admettre aussi pour expliquer les duplications de volume des gaz composés ainsi que je l'ai indiqué dans mes

mémoires précédens, et que nous le verrons encore ci-après.

En se fixant ainsi à un terme que la nature nous présente dans la détermination de la molécule, ou du nombre proportionnel, par lequel se font les combinaisons des différentes substances, on aurait l'avantage que les calculs des proportions déterminées seraient faits par tous les chimistes dans les mêmes termes, au lieu que l'arbitraire qui reste sans cela dans le choix de ce nombre, et qui fait que l'un en adopte un, et l'autre un autre, entraîne des discordances apparentes dans les résultats de ces calculs, qui d'ailleurs réduits à la même unité s'accordent parfaitement, et pourrait faire croire que les chimistes les plus estimables disputent encore sur des différences de doses doubles, ou quadruples dans la composition des corps, là où il n'y a réellement que des différences de très-petites fractions dans les évaluations de ces différens chimistes.

M. Berzelius a bien vu aussi la nécessité de ramener la théorie des atomes, ou des molécules à celle des volumes des gaz, indépendamment de toute hypothèse sur la constitution de ces derniers.

» Plusieurs savans, dit-il, ont élevé des doutes sur l'identité des atomes, et des volumes; mais comme les deux théories ne sont que des manières de se représenter les élémens qui se combinent... Elles sont bonnes, si elles donnent les plus simples explications; or ce ne serait point là le mérite de celle où l'on considérerait l'atome, et le volume comme des fractions l'un de l'autre etc. »

2. Je ne me suis pas borné, dans mes mémoires cités ci-dessus, à regarder ainsi les proportions en volume, et les densités des gaz comme un moyen commode de fixer l'arbitraire qui resterait sans cela dans la détermination des molécules, ou des nombres proportionnels dans les combinaisons; considérant la chose sous un point de vue théorique, et qui intéresse particulièrement le physicien, j'ai proposé en outre une hypothèse sur la constitution des gaz, qui justifierait encore plus complètement ce choix. Elle consiste à dire que tous les gaz à pression, et température égales contiennent sous un même volume le même nombre de molécules intégrantes, en sorte que la distance des centres des molécules dans ces circonstances est la même pour tous les gaz. Alors les densités des gaz représentent immédiatement les masses de ces molécules intégrantes, et les rapports des volumes dans les combinaisons représentent les rapports des nombres de ces molécules intégrantes, qui forment un corps composé. J'entend par *molécules intégrantes* des molécules, qui même pour les corps simples peuvent encore être composées d'autres molécules partielles, mais beaucoup plus rapprochées que les molécules totales ne le sont entre elles dans l'état des gaz, et réunies par une attraction qui ne peut avoir lieu entre ces derniers.

Cette hypothèse est certainement la plus simple que l'on puisse former sur la relation qui doit exister entre les masses des molécules, et les densités des gaz, et je ne vois pas même qui soit possible d'en imaginer une autre pour

expliquer cette relation d'une manière plausible. Aussi M. Berzelius après s'être long-tems contenté de regarder les proportions en volume comme un moyen de parvenir à la théorie naturelle des proportions définies, ou à la détermination des molécules, ainsi qu'il s'en exprime dans plusieurs de ses mémoires, sans rechercher de quelle nature pouvait être la liaison entre ces deux choses, paraît enfin disposé à admettre cette hypothèse dans son dernier ouvrage p. 52. « Les phénomènes des proportions chimiques paraissent prouver, dit-il, que chaque gaz d'un corps simple » contient dans le même volume, mesuré à la même température et à la même pression un nombre égal d'atomes, puisque dans le cas opposé, la théorie corpusculaire, et celle des volumes ne pourraient pas marcher » de front, et conduiraient au contraire à des résultats » différens.

Un des plus ingénieux physiciens de nos jours M. Ampère, a aussi adopté la même hypothèse, et même ainsi qu'il le dit, avant de connaître mes mémoires, et en fait une application heureuse à la théorie des formes des molécules intégrantes des cristaux ( annales de chimie avril 1814 ). Je dois aussi compter entre les physiciens qui ont suivi cette opinion M. Mollet, dans son mémoire *sur la constitution des gaz, et leur capacité pour le calorique* lu à l'Académie de Lyon ( journal de physique février 1820 ); et je suis porté à croire qu'elle sera admise généralement par tout ceux qui voudront fixer leur attention sur ce point.

J'ai dit que dans mon hypothèse je considère les molécules intégrantes des gaz, comme formées de plusieurs molécules simples; cela est nécessaire pour expliquer la division de ces molécules qui selon cette hypothèse se trouve avoir lieu souvent dans la formation des gaz composés, ainsi que je l'ai déjà annoncé, et dont je m'occuperai bientôt plus particulièrement; et cette même idée se trouve conforme à la théorie de M. Ampère sur les formes cristallines. Selon ce physicien la molécule intégrante des substances simples serait en général formée de quatre molécules simples placées aux quatre angles d'un tétraèdre, qui résulte de leur union: et d'après cela si on supposait que ces molécules intégrantes des cristaux ne subissent aucun changement lorsque la substance de ces cristaux viendrait à passer à l'état de gaz, chaque molécule intégrante ne pourrait en aucun cas se diviser en plus de quatre parties dans la formation des gaz composés. Je ne sache qu'il y ait des exemples de composés gazeux qui présentent une division ultérieure des molécules intégrantes; mais rien ne nous oblige non plus à admettre que les molécules intégrantes des gaz simples soient toujours les mêmes qui appartiendraient aux cristaux de ces substances solidifiées; et de même que dans la formation des gaz composés, la molécule intégrante composée qui résulterait de la réunion immédiate des molécules intégrantes des gaz simples doit souvent se diviser en deux ou plusieurs molécules intégrantes; il se pourrait aussi que dans le passage même de l'état solide



et liquide à l'état gazeux, et réciproquement, il s'opérât des semblables séparations ou réunions de molécules, de manière qu'il y eût des gaz simples dont la molécule intégrante ne fut composée que de deux molécules partielles, ou même se réduisit à une seule molécule simple, quelle que fut d'ailleurs la composition de la molécule intégrante de ces substances à l'état solide et liquide, et qu'il y eût des corps solides ou liquides dont la molécule intégrante fut composée de 8 ou 16 molécules, quoique la molécule de leur gaz ne le fut que de quatre.

Au reste ces différens cas possibles, mais de la réalisation des quels nous n'avons aucune preuve directe (1) dans l'état actuel de nos connaissances ne sauraient nous porter à adopter pour molécule intégrante primitive un autre assemblage de molécules partielles, que celui que la nature nous présente dans la constitution des gaz, et qui, comme je l'ai dit, est le seul qui puisse être fixé par l'observation.

3. M. Gay-Lussac en démontrant la simplicité des rapports des volumes dans les gaz qui se combinent avait encore étendu la même simplicité de rapport aux volumes

---

(1) Je dis *directe*, car dans un mémoire que j'ai publié dans le *Journal de physique* etc. de Pavie, et dans lequel j'ai cherché à établir une relation entre les densités des liquides, et celles des vapeurs qu'ils forment (6.<sup>e</sup> bimestre 1819) j'ai été conduit à supposer des semblables divisions, et réunions de molécules dans le passage de quelques liquides à l'état de vapeurs, et réciproquement.

des gaz composés relativement à leurs composans ; mais il n'avait établi aucune règle générale sur la nature de ce dernier rapport. En parcourant au contraire les divers composés gazeux connus , j'ai cru pouvoir établir à cet égard, dans mes mémoires précédens , un fait général , au moins pour les composés binaires , qui consiste , en ce que » à » peu d'exceptions près le volume du gaz composé est double indifféremment de l'un ou de l'autre , c'est-à-dire » égale à leur somme , si le volume des deux composans » est égal. » Nous verrons dans la suite de ce mémoire , que cette règle s'est vérifiée depuis dans plusieurs autres composés , outre ceux dont j'avais déjà parlé dans les mémoires cités. Cependant je ne vois pas que les chimistes y'aient fait attention jusqu'ici , tout en admettant ou établissant eux-mêmes les faits particuliers des quels elle résulte. M. Berzelius dit cependant *qu'il paraît* que lorsque deux élémens gazeux se combinent à volumes égaux, il n'y a point de condensation ; mais que lorsque deux volumes d'un élément se combinent avec un volume d'un autre, il y a une condensation égale à un volume , en sorte que les trois volumes n'en font que deux après la combinaison. ( Théorie etc. p. 53 ). C'est essentiellement la règle que j'ai proposée , mais exprimée d'une manière un peu moins générale.

Dans l'hypothèse citée ci-dessus sur la constitution des gaz, s'il n'y avait point de division des molécules intégrantes primitives des gaz simples , la molécule composée devant



être la somme de la molécule de l'un des gaz , et de toutes les molécules intégrantes de l'autre , que celle-là s'adjoit à elle même , le volume du gaz composé devrait aussi être le même que celui des gaz composans qui entrent dans le composé en moindre proportion , ou dont la molécule s'adjoit les autres , puisque le nombre de ces molécules serait le même que celui des molécules de ce gaz ; mais puisque le volume résultant est en général double de celui-là , il s'ensuit que le nombre des molécules composées est double aussi de celui qui résulterait de cette supposition , c'est-à-dire que chaque molécule composée se divise en deux autres molécules partielles , qui soient entr' elles dans la même proportion qui avait lieu pour les molécules entières. Dans le cas seulement des exceptions peu nombreuses dont j'ai parlé , ce partage n'a pas lieu , et la première supposition se vérifie. Tel est le point de vue sous lequel j'ai considéré la chose dans mes mémoires précédens. M. Berzelius ne parait avoir fait aucune attention à cette possibilité de ramener les volumes des gaz composés à l'hypothèse de l'identité du nombre de molécules sous un volume donné , par la supposition des divisions de molécules intégrantes. « Il est évident , dit-il , que dans un gaz composé » de deux élémens ( d'égal volume ) où il n'y a point eu » de condensation , le nombre des atomes composés est la » moitié de celui des atomes simples dans le même volume » avant la combinaison. Il en'est de même dans un gaz composé de deux volumes d'un élément , et d'un volume

» d'un autre, où il y a eu condensation d'un volume. » Berzelius conclut de-là que dans ces cas la distance entre les molécules est devenue plus grande dans les gaz composés que dans les gaz simples, et il tâche de s'en rendre raison par des idées d'accroissement de force répulsive, qui paraissent assez vagues et obscures; mais il remarque lui-même qu'il serait difficile de concevoir pourquoi la considération des substances gazeuses lors de leur combinaison est toujours une fraction des plus simples de leur volume primitif. Mon hypothèse de division des molécules introduit dans tout cela la plus grande simplicité, en étendant la constance de la distance des molécules aux gaz composés, et substituant en particulier dans les cas indiqués le redoublement du nombre des molécules au redoublement du volume occupé par les molécules primitivement formées par la combinaison.

Je ferai observer ici qu'en prenant ainsi les masses des molécules des corps soit simples, soit composés comme représentées par les densités des gaz, il en résulte qu'on ne doit pas toujours à la rigueur, considérer, ainsi qu'on l'a fait généralement jusqu'ici, la masse de la molécule d'un composé, ou le *nombre proportionnel* de ce composé, ou selon l'expression de Wollaston son *équivalent chimique*, comme étant la somme des masses des molécules de ses composans, qui sont supposées y entrer, quoique la première doive toujours être en rapport simple avec la seconde. Cette masse de la molécule composée doit être déterminée,

lorsque cela est possible, par l'observation même qui nous apprend si le volume du gaz composé est le même, ou double etc. de celui des gaz composans qui y entre en moindre proportion, et par conséquent s'il y a ou non partage de la molécule composée, et même en général, d'après ce que nous avons dit, cette masse ne doit être que la moitié de la somme dont nous venons de parler. Cependant cette considération ne me paraît pas nécessaire, tant qu'on ne veut concevoir les proportions déterminées que sous leur forme la plus simple; les volumes des gaz simples qui entrent dans une combinaison ne doivent alors être regardés que comme les unités le plus commodes, et les mesures les plus naturelles de leurs molécules. Que ces volumes, ou ces molécules restent entières, ou se divisent dans la combinaison, c'est là une connaissance intéressante sans doute en elle même, mais qui est comme étrangère à la simple théorie des proportions déterminées. Les données d'ailleurs peuvent nous manquer, et nous manquent en effet souvent pour arriver à la première de ces connaissances, tandis que nous avons des données suffisantes relativement aux proportions déterminées. Il serait donc inutile, et quelque fois impraticable d'en compliquer la théorie de ces derniers. Ainsi par exemple pour l'eau, dont nous connaissons le volume à l'état gazeux par rapport à celui de ces gaz composans, il faudrait dire à la rigueur selon notre système, que la molécule de l'eau est composée d'une molécule d'hydrogène et d'une demi-molécule d'oxygène, puisque

le volume de gaz aqueux est égal à celui de l'hydrogène, ou double de celui de l'oxygène qui entre dans sa composition.

Mais si l'on n'a égard qu'à l'expression la plus simple de la composition de l'eau relativement aux volumes, ou aux molécules de ses composans, on pourra dire aussi que pour former l'eau, un volume, ou molécule d'oxygène prend deux volumes, ou deux molécules d'hydrogène, quoique la molécule composée qui en résulte se divise ensuite en deux d'après l'expérience. En adoptant cette dernière manière de s'exprimer, on ne pourra pas dire, à la vérité, selon nos idées, que la masse de la molécule de l'eau est égale à la somme des masses d'une molécule d'oxygène, et deux d'hydrogène; mais cette somme sera toujours l'expression *d'une molécule d'oxygène portée à l'état d'eau par sa combinaison avec deux molécules d'hydrogène*, et lorsqu'on dira qu'une molécule d'oxygène en cet état s'unit à une molécule d'un autre corps, pour former un hydrate, il n'y aura pas d'ambiguïté, et on s'exprimera exactement par rapport à la composition, sans faire entrer en considération la constitution particulière du gaz aqueux. Ainsi, en général, les nombres proportionnels, ou les équivalens chimiques des corps composés, formés par la somme des nombres proportionnels de leurs composans, ainsi qu'on l'a pratiqué jusqu'ici, pourront toujours être employés, sans blesser la théorie, pourvu qu'on n'entende par là que la masse qui résulte d'une molécule de l'un des composans,

avec le nombre de molécule de l'autre nécessaire pour en former le composé dont il s'agit, quelle que soit d'ailleurs la molécule réelle de ce composé.

Ce que nous venons de dire du rapport du volume des gaz composés au volume des gaz composans regarde les cas, où un volume d'un gaz se joint à un volume égal au sien, ou multiple du sien d'un autre gaz, c'est-à-dire qu'une molécule d'un corps s'adjoit une, ou plusieurs molécules entières d'un autre corps. Lorsqu'en parlant ci-après des additions faites plus récemment à la théorie des proportions déterminées, nous chercherons, comme nous l'avons déjà annoncé à ramener aux combinaisons multiples même le cas, où le rapport des volumes des composans gazeux est par exemple de 2 à 3, à 5, etc. nous verrons aussi jusqu'à quel point on peut y étendre les principes que nous venons d'établir.

Nous nous sommes en outre bornés dans ce qui précède aux composés binaires. Les composés plus compliqués connus à l'état gazeux sont encore trop peu nombreux, pour qu'on puisse établir avec quelque certitude des principes généraux sur la relation du volume de ces composés à celui de leurs composans. Nous examinerons au reste aussi dans la section suivante ce qu'on a fait en général pour l'application de la théorie des proportions définies aux composés de plus de deux substances.



*II.<sup>e</sup> Section. Additions faites, ou proposées plus récemment à la théorie des proportions déterminées.*

1. Dans ce qui précède j'ai rappelé ce que j'avais fait pour la théorie réunie des rapports simples des volumes, et des proportions déterminées dans les deux mémoires de 1811, et 1814, et j'ai examiné jusqu'à quel point ce que j'avais dit alors a été confirmé ou modifié par les découvertes postérieures. Pour compléter le tableau général de l'état actuel de cette théorie, il me reste à rassembler les additions qui ont été faites ou proposées à cette théorie depuis la même époque, et que je n'avais pas indiquées du moins assez explicitement dans mes deux mémoires, et à examiner jusqu'à quel point ces additions sont admissibles, et conciliables avec mes premières idées.

Et d'abord ce moyen dont j'ai déjà parlé de réduire toutes les combinaisons binaires à la théorie de celles, où une molécule d'un corps en prend une, deux, etc. de l'autre, quoique ses doses offrent des quantités en apparence fractionnaires par rapport au nombre proportionnel, qu'on a choisi, et en particulier par rapport à celui indiqué par le volume des gaz, et qui consiste à considérer ces corps comme formés de deux combinaisons préalables des mêmes substances, à proportions différentes, assujetties chacune à la loi des doses multiples, ce moyen, dis-je, n'a été imaginé que postérieurement à l'époque de mes mémoires. M. Gay-Lussac en a eu, je crois, la première

idée à propos d'un des oxides de fer, et M. Ampère a employé un moyen semblable pour expliquer quelques degrés de l'oxigénation de l'azote; MM. Berzelius, Thomson, et autres en ont fait depuis beaucoup d'usage. J'avais à la vérité parlé de cet oxide de fer dans mon second mémoire, et j'avais même proposé, pour en expliquer la formation un principe qui avait quelque analogie avec celui dont il s'agit, savoir, je le considérais comme un composé d'un oxide de fer préexistant, et d'oxigène. J'en avais fait de même pour quelques composés d'oxigène et d'azote que je n'avais pu rapporter immédiatement à la théorie des multiples; je les avais considéré comme formés de gaz nitreux, ou deutoxide d'azote, et d'oxigène. Mais cette explication, d'après laquelle l'un des composans de la combinaison secondaire est toujours l'un des corps simples primitifs, et l'oxigénation dont il s'agit est seulement conçue se faire en deux fois, me semble maintenant insuffisante, et moins naturelle, d'autant plus que les combinaisons entre un corps simple, et un corps composé paraissent en général rares, et peu intimes. Au contraire dans la nouvelle manière proposée de concevoir ces composés, la seconde combinaison se fait sur des corps qu'on peut considérer comme différens des deux corps simples qui entrent dans la composition de chacun d'eux, et il est naturel que le principe des doses multiples puisse s'y appliquer successivement, quel qu'en soit le résultat définitif. En supposant donc que cet expédient soit nécessaire pour la théorie, je crois qu'on ne peut faire



aucune difficulté d'y recourir, et qu'on doit l'adopter préférentiellement à ma première manière de voir. À la vérité, comme je l'ai remarqué ci-dessus, cette nécessité n'a lieu en général, que lorsqu'on considère le nombre proportionnel, comme représentant le poids d'une molécule *indivisible* des substances auxquelles on l'applique, et ce n'est pas là le cas par rapport à notre détermination de ce nombre par les densités des gaz, dont nous supposons les molécules intégrantes sous-divisibles, et se sous-divisant en effet souvent dans les combinaisons, en plusieurs molécules partielles, en sorte qu'en supposant par exemple que la molécule intégrante des gaz soit formée de quatre molécules partielles, on peut bien concevoir qu'une molécule intégrante d'un gaz en prenne une moitié, une et demie etc., c'est-à-dire deux molécules, six molécules partielles etc. d'un autre, mais comme cette division doit avoir des limites qui nous sont inconnues, et que les combinaisons observées pourraient obliger à dépasser lorsqu'on ne voudrait pas avoir recours à la supposition proposée pour les ramener en tout ou en partie à la théorie des doses multiples; qu'en outre sans cela on serait quelque fois obligé d'admettre une division de molécules en tiers, cinquièmes etc., ce qui ne s'accorderait pas avec la supposition probable de quatre molécules partielles dans chaque molécule des gaz simples; et qu'en tout cas il résulte toujours de cette manière de voir plus de simplicité dans la théorie, je crois à propos d'appliquer cette supposition à la théorie

des volumes, lorsque cela se trouve possible, et qu'il ne s'agit de représenter les proportions des élémens primitifs; et c'est ce que je tâcherai de faire dans la partie de ce mémoire, qui regarde les différentes substances particulières. C'est là aussi, et nommément, en traitant des degrés d'oxigénation de l'azote, et du fer que je crois devoir renvoyer les principes généraux de cette application, qui en deviendront plus clairs que si on les présentait d'une manière abstraite, et indépendante de tout exemple particulier.

Je remarquerai seulement encore ici que dans la même vue d'éviter les fractions lorsque le rapport est multiple, c'est toujours la substance qui entre en moindre dose, ou comme unité qu'on doit prendre pour base; ainsi par exemple le gaz protoxide d'azote doit être considéré comme formé d'un volume d'oxigène, quoique dans la réalité, et d'après notre théorie de la constitution des gaz la molécule de ce composé soit formée d'une molécule entière d'azote, et d'une demie molécule d'oxigène; nous verrons cependant à son lieu un moyen par lequel on pourrait ramener cette combinaison à la théorie des multiples, même en prenant l'azote pour base; on en peut dire autant de l'eau etc. Quant aux combinaisons où les deux élémens entrent par volume égal, il est indifférent pour la théorie des proportions définies de prendre l'un ou l'autre pour base, mais on peut se déterminer par d'autres considérations étrangères à cette théorie, en prenant par exemple la substance moins oxigénique, ou celle qui est electro-positive

par rapport à l'autre; ainsi le gaz nitreux serait alors par exemple considéré comme un *oxide d'azote*, plutôt que une *azoture d'oxygène*.

Mais pour revenir aux combinaisons non multiples en apparence, on pourrait aussi fort-bien concevoir tout simplement que deux molécules d'un corps se joignissent à 3, 5, etc. molécules par exemple d'un autre, car c'est à quoi la supposition même des multiples préexistans revient dans le fond, quant au résultat final, lorsqu'on fait abstraction des partages de molécules qui peuvent s'ensuivre; mais si l'on admettait une fois la possibilité de ces sortes de compositions d'une manière immédiate, on ne voit pas pourquoi un nombre quelconque de molécules d'un corps ne pourrait se joindre à un nombre quelconque de molécules d'un autre corps, et il n'y aurait plus de proportions définies dans les combinaisons. Il est donc nécessaire (et c'est M. Berzelius qui a surtout insisté sur cette remarque) de poser en principe qu'une molécule d'une substance ne peut prendre dans les combinaisons proprement dites, et immédiates qu'une molécule, ou un nombre entier de molécules d'un autre en les supposant indivisibles, et de rejeter les violations apparentes de cette règle sur des composés multiples préexistans, qui forment entr'eux une combinaison secondaire. Et cela paraît d'autant mieux fondé que plusieurs de ces combinaisons se réduisent en effet aisement, ainsi que quelques chimistes l'ont remarqué dans les combinaisons primaires d'où on les suppose formées.

Au reste toutes les fois que le composé sera gazeux, ou pourra être examiné dans cet état, il ne pourra résulter de l'indécision qui pourrait rester à cet égard, aucun doute sur la composition de la molécule résultante. Le volume du gaz composé indiquera toujours si cette molécule, telle qu'on la conçoit, formée par des molécules entières, s'est ensuite divisée, ou est restée entière, et par conséquent de combien de molécules, et de fractions de molécules intégrantes de chaque corps simple la molécule intégrante finale est composée, de quelque manière qu'on en conçoive la formation. Et il est probable, que, puisque ces composés peuvent se ramener en général à la théorie des multiples, comme nous l'avons indiqué, par des suppositions de combinaisons secondaires, la même règle que nous avons admis pour les composés à doses multiples, savoir du partage de la molécule en deux, ou duplication du volume relativement à celui des composans qui entre en moindre proportion, pourra s'appliquer successivement aux deux ordres de combinaisons, d'où résultent ces composés en apparence *fractionnaires*, et que tout-au-plus il pourra résulter de cette double application une quadruplication de volume au lieu d'une simple duplication. Mais c'est à l'observation à confirmer, ou modifier ces apperçus, et nous aurons occasion de voir dans la 2.<sup>e</sup> partie de ce mémoire le peu qu'elle nous apprend à cet égard.

2. La théorie des proportions déterminées doit naturellement s'étendre aux composés qui contiennent plus de deux

substances simples ; dans mes mémoires je ne m'étais guère occupé que des combinaisons binaires ; M. Berzelius a cherché à établir aussi quelques règles générales suivies par la nature dans la formation des composés de plusieurs éléments relativement à cette théorie. Il distingue à cet égard la *composition inorganique* de la *composition organique* ; dans la première espèce de composition , qui appartient aux corps non organisés les composés ternaires et quaternaire doivent être considérés , selon lui , comme des composés du second ordre de deux composés binaires , et les composés plus compliqués comme composés du 3.<sup>e</sup> ordre , c'est-à-dire formés par la combinaison entre eux de ceux du second ordre , et ainsi de suite ; et il établit entre les composés du premier ordre qui entrent dans la formation des composés du second ordre , etc. de certaines relations , auxquelles la nature est assujettie selon lui dans ces sortes de combinaisons. Au contraire dans la composition *organique* , ou des corps organisés les trois , quatre etc. substances simples qui entrent dans leur composition ne sont assujetties à aucune relation entre elles , en sorte que bien loin que l'une d'elles y doive entrer par une seule molécule , combinée avec un certain nombre de molécules des autres , les nombres de molécules de toutes , dans la formation d'une molécule intégrante de ces composés , peuvent avoir entre eux un rapport quelconque. Nous examinerons bientôt jusqu'à quel point cette distinction peut être regardée comme fondée ; mais nous nous occuperons d'abord des composés de



la première espèce, qui sont ceux que nous pouvons refaire à volonté, et sur lesquels par conséquent nous avons nécessairement des connaissances plus précises.

On ne peut douter que la manière dont M. Berzelius conçoit la formation de ces composés ne soit au moins la manière plus simple d'en représenter la composition et ses lois. Au reste les lois qu'il a établies se bornent à-peu-près aux composés ternaires, qu'on considère communément, et qu'on doit en effet considérer selon lui comme des composés du second ordre, formés par la combinaison de deux composés binaires, dont l'un des composans est commun, et en particulier d'un acide, et d'un oxide qui forment un *sel*, et dont le composant commun est l'oxygène. Ces faits généraux auxquels le conduisent, à cet égard les observations qu'il a rassemblées me paraissent essentiellement se réduire aux deux suivans;

1.<sup>o</sup> Les deux substances avec lesquelles le composant commun ( qui dans le cas des sels est la substance electro-négative par rapport aux autres ) est combiné, doivent s'unir entr'elles selon la même loi que si elles étaient seules, et qu'elles dussent former une combinaison binaire, c'est-à-dire qu'en général une molécule de l'une doit prendre une, ou un nombre entier de molécules de l'autre.

2.<sup>o</sup> La dose ou nombre de molécules du composant commun à laquelle est unie l'une des deux substances indiquées doit être un multiple de la dose, ou nombre de molécules du même composant à laquelle est unie l'autre substance.



Ces deux principes particularisés par rapport aux oxides, et aux bases oxigénées qui forment les sels se transforment en ceux-ci :

1.<sup>o</sup> Le radical de l'acide, et le radical de la base doivent présenter la même relation que s'ils se combinaient seuls , et sans oxigène , c'est-à-dire qu'une molécule de l'un doit prendre une ou plusieurs molécules de l'autre.

2.<sup>o</sup> La dose d'oxigène de l'acide est un multiple de celle de la base , ou réciproquement.

Le premier principe paraît être une suite presque nécessaire de la manière de concevoir les combinaisons ternaires comme des composés du second ordre , et de l'admission de ce principe dans les combinaisons binaires. Mais les exceptions, du moins apparentes , que nous présentent à cet égard les combinaisons binaires mêmes doivent également s'appliquer à ces composés. Au reste les combinaisons ternaires de ce genre examinées jusqu'ici paraissent en général offrir les deux radicaux combinés entre eux dans les mêmes proportions qu'ils présentent dans leurs combinaisons binaires , en sorte que si celles-ci peuvent être ramenées au principe dont il s'agit par des suppositions de combinaisons secondaires entre des composés qui y sont assujettis , les premiers le seront aussi nécessairement.

Le second principe paraît avoir été assez bien établi par Berzelius d'après les analyses de sels qu'il a données, relativement aux acides qui renferment deux, ou trois molécules d'oxigène pour une de radical , et c'est un fait

d'observation assez remarquable. Il en résulte, par exemple, que si la base contient deux molécules d'oxygène pour une de radical, et l'acide trois pour une de radical ( ainsi que cela a lieu , à ce qui paraît , pour la plus part des bases alcalines , et pour l'acide sulfurique ) l'union d'une molécule du premier radical avec une seulement du second dans cet état d'oxygénation n'a point lieu en général , du moins dans les circonstances ordinaires ( car il s'ensuivrait alors que l'oxygène de l'acide serait à celui de la base comme 3 à 2 , ou  $1\frac{1}{2}$  à 1 ), mais seulement d'une molécule du premier radical, avec une, deux , etc. du second , en sorte que la quantité de l'oxygène de l'acide soit triple, ou sextuple etc. de celle de la base. Au contraire si la base est un protoxide , elle pourra se combiner en raison d'une molécule de son radical avec une seule molécule du radical de l'acide , cela suffisant alors , pour que la quantité de l'oxygène de l'acide soit triple de celle de la base.

Je remarquerai ici que cette observation paraît se lier avec celle qui avait été déjà faite par plusieurs chimistes, que plus une base est oxygénée , et plus elle prend d'acide dans des circonstances analogues , et même à cet autre fait plus anciennement connu , que les métaux ne peuvent se combiner aux acides qu'après avoir été préalablement oxygénés , car tout cela montre qu'il doit y avoir une certaine relation entre l'oxygène de la base , et celui de l'acide. Mais la possibilité des combinaisons contraires à la règle indiquée , même pour les genres de sels dont nous avons

parlé, ne paraît pas exclue entièrement par les expériences de Berzelius, du moins dans des sous-sels qui ne se forment que dans quelques circonstances particulières, et cette règle paraît plutôt tenir à des relations d'affinité chimique, et de cohésion, qui exigent certaines proportions pour une combinaison intime, ou même pour la possibilité de la combinaison, qu'à celle des proportions définies. En effet M. Berzelius avait déjà remarqué depuis long-tems que cette règle n'avait point lieu par exemple pour l'acide nitrique, dans lequel une molécule d'azote est unie, d'après le rapport en volume, a deux molécules et demie d'oxygène, et dont les sels formés dans les circonstances ordinaires contiennent souvent  $2 \frac{1}{2}$  d'oxygène pour 1 d'oxygène de la base; et c'est pour ramener les sels composés de cet acide à sa règle qu'il avait surtout été conduit à admettre, que l'azote était déjà un oxide tel, que l'acide nitrique devint composé d'une molécule de radical, et trois d'oxygène. Mais ayant trouvé depuis la même anomalie dans l'acide phosphorique composé, selon ses expériences d'une molécule de phosphore et  $2 \frac{1}{2}$  d'oxygène, ou bien 1 de phosphore et 5 d'oxygène, et ne voyant pas de raison d'ailleurs, de croire le phosphore un oxide, il pense maintenant que la règle n'a pas lieu réellement pour les acides composés de cette manière, et paraît même presque disposé à renoncer après cela à l'idée de la composition de l'azote. Et en effet c'est une suite naturelle de la composition de ces acides, que la loi des sulfates ne soit pas applicable

aux sels qui en sont formés ; car pour ces acides à *oxygénation fractionnaire* si l'on peut s'exprimer ainsi, l'oxygène de l'acide ne pourrait devenir un multiple de celui de la base, en supposant que la loi des multiples soit observée dans la combinaison des radicaux entr'eux, que lorsqu'il y aurait au moins cinq fois autant d'oxygène de l'acide que de la base, rapport trop éloigné de celui de 3 à 1 qui a lieu pour les sulfates ordinaires, pour que les sels qui en résultent puissent être pris pour leurs analogues, ou se formant dans les mêmes circonstances, tandis que le rapport de  $2\frac{1}{2}$  à 1 s'approche assez de celui de 4 à 1 pour former des sels, qu'on peut considérer, autant que la nature différente des acides le comporte, comme les analogues de ces sulfates. Ainsi il paraît qu'il n'y a point d'autre règle générale sur la composition des sels, si non que les proportions déterminées ayant lieu dans la combinaison entre les radicaux de l'acide, et de la base, il en résulte nécessairement de certaines relations entre l'oxygène de l'un, et l'oxygène de l'autre, d'après le nombre de molécules qui entrent dans la constitution de l'acide et de la base, et que parmi ces relations mêmes la nature se limite plus particulièrement à quelques unes dans de certaines circonstances qui déterminent la formation de ces sels. Au reste les observations relatives à ce dernier point peuvent quelque fois servir à confirmer, ou rectifier les conjectures qu'on aura formées sur la constitution même des acides et des bases, et plusieurs chimistes en ont en effet tiré parti pour cet objet.

3. Mais les sels dont l'acide et la base sont des substances oxigénées ne sont pas les seuls que nous connaissons. L'hydrochlorate d'ammoniaque nous présente un sel ternaire dont les élémens sont le chlore, l'azote, et l'hydrogène, et dans lequel le principe commun à la base et à l'acide est l'hydrogène; et il y a d'ailleurs des sels quaternaires, c'est-à-dire dont la base et l'acide sont formés chacun de deux élémens différens, comme les sels à acide oxigéné, et à base d'ammoniaque.

M. Berzelius ne s'est point occupé des lois particulières de composition de ces sortes de sels, parce que d'après ses hypothèses sur la composition du chlore, et de l'azote il a dû les considérer comme analogues aux précédens. Ils mériteraient sous ce point de vue un examen particulier.

Je n'ai rien dit sur la théorie des volumes relativement à ces différens sels, parce qu'on n'en connaît aucun jusqu'ici à l'état de gaz; il serait cependant possible, et intéressant de rechercher quelle est la densité de la vapeur de ceux de ces sels qui sont volatils, comme la plus part de ceux à base d'ammoniaque.

Il y a d'autres combinaisons ternaires qui ne paraissent pas devoir être considérées ainsi que les sels ternaires proprement dits, comme formées de l'union de deux composés binaires ayant un des élémens communs, mais plutôt comme des combinaisons d'une substance simple avec un composé formé des deux autres substances. Tels sont, par exemple, les sulfures alcalines, c'est-à-dire à base d'oxides alcalins. D'après



des expériences de M. Vauquelin ( ann. de chimie et de phys. septembre 1817 ) les sulfures qu'on obtient à une haute chaleur ne seraient que des sulfures métalliques, et non des sulfures d'oxide ; mais cela n'a pas lieu pour les sulfures alcalins formés à une température moins élevée, comme l'a fait voir M. Gay-Lussac ( ibid. novembre 1817 ), et il paraît que l'existence de ces sulfures n'est pas douteuse. Il paraît aussi établi que le chlore peut se joindre avec les alcalis, et le gaz *phosgène* formé par la combinaison du chlore avec l'oxide de carbone nous présente un autre fait de ce genre. Concevra-t-on en ces cas l'oxigène de l'alcali, de la potasse par exemple, comme se partageant entre le soufre ou le chlore d'un coté, et le potassium de l'autre ? Rien ne nous porte à le croire, et la supposition la plus naturelle, et suggérée par la formation même de ces combinaisons, est qu'elles soient en effet des sulfures ou des chlorures d'oxide, ou des espèces de sels dans lesquels le soufre ou le chlore font fonction d'acide tout aussi bien que lorsque ces substances sont préalablement combinées avec l'oxigène, ou avec l'hydrogène. Ces sortes de combinaisons d'un corps simple avec un composé binaire n'ont rien de repugnant en elles-mêmes, et je ne m'étonnerai pas que de même que les sulfures, et chlorures alcalins nous présentent l'union d'un alcali avec un corps simple qui fait par rapport à eux fonction d'acide, on ne découvre un jour des combinaisons d'un acide avec un corps simple, par exemple un métal, qui ferait fonction



de base ; car puisque un métal peut s'unir avec un acide en prenant préalablement des doses variées , comme 1, 2, 3, etc. d'oxygène , on ne voit pas *a priori* pourquoi il ne pourrait pas s'y unir sans oxygène du tout. Il est vrai que cela n'a pas lieu dans les circonstances ordinaires , mais comme je l'ai déjà dit , en parlant de la loi des sulfates , de Berzelius , cela paraît dépendre de quelque relation d'affinité , et de cohésion qui pourraient cesser de s'y opposer dans d'autres circonstances. Nous avons d'autres exemples de ces sortes de combinaisons dans celles du gaz cyanogène soit avec le gaz hydrogène , soit avec le chlore séparément , et il est remarquable que dans l'une de ces combinaisons celle avec le chlore c'est le corps simple qui est élément électro-négatif , ou faisant fonction d'acide , et dans l'autre celle avec l'hydrogène c'est l'élément électro-négatif , qui est simple , et qui se joint à un corps composé faisant fonction d'acide , comme cela aurait lieu dans le cas d'un métal non oxidé qui se combinerait à un acide. M. Berzelius ne s'est point occupé des lois de combinaisons de ces sortes de composés , et ils sont peut-être encore trop peu connues , et en trop petit nombre pour chercher à en établir. Cependant le gaz phosgène , l'acide hydrocyanique , et l'acide chlorocyanique ayant été observés à l'état de gaz ou de vapeurs peuvent nous fournir relativement à la théorie des volumes quelques considérations , que je crois renvoyer à l'article particulier de ces combinaisons dans la 2.<sup>e</sup> partie de ce mémoire.

Les hydrates d'acides, ou d'alcalis, ou de simples oxides peuvent être regardés et sont en effet regardés par M. Berzelius comme des espèces de sels, dans lesquels l'eau fait fonction d'acide, ou d'alcali, et qui sont assujettis aux mêmes lois de combinaisons que les autres sels. Mais les hydrates de sels sont des combinaisons plus compliquées, savoir d'un composé du 2.<sup>e</sup> ordre qui est le sel, avec un composé binaire qui est l'eau. On pourrait à la vérité considérer cette eau comme réunie en partie à l'acide, en partie à l'alcali, en sorte que le composé résulterait de l'union d'un acide hydraté avec un alcali hydraté; mais je crois que généralement la première supposition est la plus naturelle: il peut cependant y avoir des cas où quelques circonstances nous obligent d'attribuer l'eau à l'acide, et à l'alcali séparément.

Enfin M. Berzelius admet des combinaisons de deux ou plusieurs sels entr'eux, mais il n'a fait aucune recherche sur les lois générales de ces sortes de combinaisons plus compliquées. Il a seulement remarqué quelques cas particuliers, où des lois analogues à celles qu'il avait établi pour les sels simples, se vérifiaient pour ces composés, et dernièrement dans son *examen de quelques composés qui dépendent d'affinité très-faible* (ann. de chimie et de phys. août 1820) il a considéré les combinaisons des sels entr'eux comme appartenant à cette classe, et a observé qu'en conséquence elles peuvent présenter une complication de composition qui ne peut avoir lieu dans les combinaisons des premiers ordres, dans lesquelles les affinités agissent avec toute leur force.

4. Quant à la composition inorganique, elle n'est selon Berzelius, à proprement, parler soumise à aucune loi, et ce chimiste admet lui-même d'après ses propres analyses des compositions fort-complicquées dans les substances végétales et animales. Mais cette distinction même entre les deux espèces de combinaisons est-elle bien fondée, et ne pourrait-on pas ramener la composition organique aux mêmes lois que l'inorganique, en considérant les composés qu'on y rapporte comme des composés du second ordre, du 3.<sup>e</sup> ordre etc. formés de combinaisons binaires, ou d'un corps simple uni à un composé binaire, ternaire etc. ? Il paraît en effet peu probable, à considérer la chose théoriquement que ces combinaisons soient d'une nature toute différente des autres, et la différence pourrait seulement consister dans certaines proportions qui n'ont pas lieu dans les combinaisons ordinaires, et que l'opération seule de la végétation, ou de l'animalisation peut former, quoique assujetties aux mêmes lois générales. La difficulté paraît seulement consister ici à déterminer quel est le mode et l'ordre de ces combinaisons; si, par exemple des trois substances qui entrent dans un composé ternaire de ce genre une d'elle, et laquelle doit être distribuée entre les deux autres pour former deux composés binaires, ou bien si deux d'entr'elles forment un composé binaire, auquel l'autre vienne ensuite se joindre etc. et l'indétermination est encore plus grande pour les combinaisons quaternaires. Mais par cela même que le mode de combinaison est inconnu, et que

rien ne porte même à croire qu'il y en ait un particulier, par lequel un des élémens joue relativement aux proportions déterminées un rôle différent de l'autre, dans ces composés il est naturel de concevoir ces combinaisons de la manière la plus générale et la plus simple qui consiste à supposer successivement les différens élémens réunis à une première substance qu'on prendra pour base, et par là aux combinaisons binaires, ternaires etc. qui en résultent successivement, et d'appliquer à ces combinaisons successives les mêmes lois que nous présentent les combinaisons binaires. Quant au choix de la substance qu'on veut prendre pour base, et à l'ordre dans lequel on peut concevoir que se fassent les combinaisons des autres il est entièrement arbitraire, si ce n'est que par analogie avec ce qu'on pratique pour les composés binaires, il est naturel de choisir pour base celle des substances qui entre dans le composé pour un moindre nombre de molécules, pour éviter les fractions; et si le nombre de molécules est égal pour toutes, on se déterminera d'après le degré d'oxigénité des substances, en prenant pour base par exemple la moins oxigénique, c'es-à-dire celle qui est electro-positive par rapport à toutes les autres; et une semblable considération pourra aussi décider l'ordre de combinaison entre les autres élémens. On observera que pour les composés ternaires ce mode de combinaison revient à supposer qu'il soient formés d'un composé binaire des deux premières substances qu'on considère, et de la troisième substance simple qu'on y ajoute

et qu'on rapporte toujours à la base du premier composé. On pourrait aussi prendre pour base l'une des substances simples, et y rapporter la combinaison de deux autres supposés déjà formée; mais alors la base du composé binaire n'étant plus considéré comme la même que celle du composé total, l'application des lois des combinaisons binaires à chacune des combinaisons successives deviendrait plus compliquée. Quant aux combinaisons quaternaires, on doit concevoir d'abord un composé ternaire formé de la manière que nous venons d'indiquer, et l'union de la 4.<sup>e</sup> substance, avec ce composé, ou plutôt avec sa base déjà chargée des deux autres substances, le transformera dans le composé quaternaire.

J'espère de faire voir dans un mémoire particulier, qu'en procédant ainsi, et appliquant à chaque combinaison binaire successive la supposition de combinaisons multiples préexistantes, lorsqu'elles se présenteront sous la forme fractionnaire on peut ramener à la théorie des multiples les composés les plus compliqués de ce genre, et qu'ainsi rien ne nous oblige à les supposer formés selon d'autres lois que les composés inorganiques (1).

---

(1) J'ai vu depuis la rédaction de cette partie de mon mémoire dans l'*analyse des principaux travaux dans les sciences physiques* par M. Blainville (journal de physique janvier 1820) un court extrait d'un mémoire de M. Murray, qui doit se trouver dans les *annals of philosophy*, et dans lequel l'auteur paraît avoir développé sur les compositions des substances végétales et animales des idées analogues à celles que je viens d'indiquer; mais je ne connais jusqu'à présent ce mémoire que par l'extrait que je viens d'en citer.



5. J'ajouterai ici l'indication de quelques tentatives qu'on a faites pour simplifier encore la théorie des proportions définies, mais qui ne me paraissent conduire à aucun résultat réel. Un anonyme dans un mémoire inséré dans les *annals of philosophy* de Thomson, et extrait dans les *Annales de chimie et de phys.* avril 1816, dans lequel il s'appuie au reste sur la théorie des volumes pour ses déterminations, a cru pouvoir supposer que les molécules des différentes substances sont toutes exprimées par un nombre entier, en prenant pour unité celle de l'un d'elles, et notamment de l'hydrogène, ou une partie aliquote de l'un des autres, et M. Meinecke ne paraît pas non plus éloigné de cette opinion, dans son mémoire sur la grosseur des molécules (*ann. de phys.* de Gilbert, trad. *Bibl. univ.* mars 1817). Mais ce système ne me paraît avoir aucune probabilité en lui-même, et les nombres approchans qu'on a obtenu ne semblent provenir que de la petitesse de l'unité que l'on a choisie, et la latitude que laissent encore les expériences le plus exactes qui ont été faites jusqu'ici pour la détermination des masses des molécules, et qui permet en effet de prendre des nombres entiers approchans, pour la commodité des calculs.

M. Frère de Montizon a cru remarquer dans les degrés de sulfuration, et d'oxidation des différens métaux (*ann. de chimie et de phys.* septembre 1816, et janvier 1818) des rapports avec le volume, et la densité de ces métaux qui pourraient porter à croire que la grosseur de la molécule



est proportionnelle à la densité des corps, même à l'état solide; mais s'il est probable qu'il y a quelque relation entre ces deux choses, et qu'en général les métaux doués d'une plus grosse molécule sont aussi les plus pesans, tout porte à croire d'un autre côté que cette relation est d'une nature plus compliquée qu'une simple proportion. Aussi les nombres trouvés par M. de Montizon ne paraissent-ils avoir aucun rapport avec les proportions définies, et ne présentent de rapports un peu simples entr'eux, que par les petites modifications faites aux résultats donnés par l'expérience.

6. Mais parmi les découvertes qui ont rapport à la théorie des atomes ou masses des molécules je dois faire mention d'une relation très-intéressante, que MM. Petit et Dulong ont trouvée par leurs expériences entre la chaleur spécifique des corps à l'état solide, et les masses de leurs molécules ( *annal. de chimie et de phys.* avril 1819 ). Elle consiste en ce que le produit de la chaleur spécifique des corps ( la plupart métalliques ) qu'ils ont examinés sous ce point de vue, par la masse de leur molécule, est égal pour tous ces corps, en sorte que la chaleur spécifique de chaque atome doit être la même pour tous, et qu'en supposant cette règle générale on pourrait obtenir la grosseur de l'atome d'une substance, par laquelle on ne la connaîtrait pas d'ailleurs, en divisant le nombre constant que les expériences ont donné pour ce produit par la chaleur spécifique de cette substance. Cependant une réflexion très-simple

paraît porter à croire que l'égalité indiquée ne peut être qu'approchée; c'est que les chaleurs spécifiques des corps varient en général selon les températures auxquelles on les supporte, et probablement avec une rapidité différente pour chacun d'eux, selon leur dilatabilité, leur fusibilité etc., et qu'ainsi en supposant que l'égalité dont il s'agit fut exacte à une certaine température, elle ne pourrait l'être pour une autre. Je crois probable d'après cela que l'égalité n'aurait lieu rigoureusement que pour un certain état déterminé des corps répondant à une température différente pour chacun d'eux, et qu'elle ne se vérifie sensiblement à la température ordinaire pour tous, qu'autant que la loi par laquelle elle s'altère en partant de cet état est assez peu rapide pour que le changement ne soit pas très-considérable.

Au reste cette loi, même supposée simplement approchée pourrait être très-utile, du moins pour fixer notre choix entre les différens multiples ou aliquotes d'un même nombre relativement à la masse de la molécule à déterminer, si on admettait que la molécule dans les corps solides fut nécessairement la même que dans les mêmes corps à l'état gazeux, sans aucune division ou réunion. Mais c'est précisément ce qui paraît fort-douteux d'après ce que nous avons dit précédemment. Aussi verrons nous dans la 2.<sup>e</sup> partie, que les masses des molécules que MM. Petit et Dulong ont été conduit à supposer par cette relation sont quelques fois des aliquotes ou des multiples de celles

auxquelles les conjectures les plus probables sur les volumes gazeux nous conduisent, et que nous avons cru devoir prendre pour les termes fixes que la nature nous présente pour cette détermination.

7. Enfin je dois encore remarquer que l'observation des formes cristallines, d'après la manière dont M. Ampère en conçoit la formation par des molécules simples placées aux angles de ces formes, dans le mémoire que j'ai déjà eu occasion de citer, et avec laquelle ont aussi beaucoup de rapport les considérations de M. Wollaston à cet égard ( Trans. phil. 1813 p. 1 ) paraît devoir nous fournir un moyen de classer ensemble les composés analogues par rapport au nombre des molécules, par l'analogie qu'il en doit résulter dans ces formes mêmes, et nous diriger par là dans la détermination du nombre relatif de molécules, et conséquemment de leur masse relative dans des cas où les considérations directes nous laisseraient dans le doute à cet égard. M. Ampère avait déjà fait quelques applications de ce genre; mais les formes toutes différentes, que présentaient plusieurs composés en apparence analogue par leur composition paraissaient s'opposer à la généralisation de cette théorie. M. Mitscherlich dans un mémoire qu'il a lu à l'Académie de Berlin, et qui a été inséré dans les *Annales de chimie et de physique* juin 1820 vient de résoudre en partie cette difficulté, en faisant voir que plusieurs sels, et quelques autres substances dans lesquels on peut présenter une composition analogue en molécules, présentent en effet

des formes primitives, et des systèmes cristallins analogues et que si plusieurs sels qui ont une même composition en acide et en base, présentent néanmoins des formes entièrement différentes, c'est qu'ils contiennent un nombre différent d'atomes d'eau de cristallisation, et ne sont pas par conséquent des composés vraiment analogues. Je dis que les sels de composition entièrement semblable en nombre d'atomes présentent, d'après les remarques de M. Mitscherlich des formes simplement *analogues*; c'est ce qui me paraît résulter essentiellement de son mémoire, et M. Beudant dans une lettre à M. Gay-Lussac, publiée dans le cahier de juillet du journal cité, confirme par ses propres observations les faits qui paraissent établir ce résultat. M. Mitscherlich est allé plus loin en soutenant que ces formes n'étaient pas seulement analogues, mais tout-à-fait identiques c'est-à-dire avec les mêmes angles, et les mêmes dimensions relatives, quelles que fussent les substances composantes; mais M. Beudant dans la lettre citée et M. Haüy dans une note insérée dans le même cahier des *Annales*, ont fait remarquer que la plupart des faits, tirés des cristaux naturels des minéraux, sur lesquels M. Mitscherlich s'appuyait à cet égard étaient inexacts, et quant aux cristaux des sels qu'il a formé artificiellement, il me semble probable, quoique les identités alléguées par rapport à eux soient confirmées par M. Beudant, qu'il s'y est glissé quelque illusion, et que tout-au-plus les sels particuliers qu'il a examinés excepté ceux dont les formes sont de celles que

Haüy appelle *formes limites* avaient des angles très-peu différens, mais dont un examen plus soigné aurait montré l'inégalité, ainsi que cela est arrivé, par les observations de Malus, et de Wollaston pour quelques cristaux naturels, qu'on avait d'abord confondus sous une même forme. Au reste les incertitudes et les difficultés qui peuvent rester à cet égard, et qui appartiennent à une branche de connaissances pour ainsi dire étrangères à la théorie des proportions déterminées nous empêchent de faire un usage étendu de ces considérations dans l'exposition de cette théorie, jusqu'à ce que les physiciens qui s'occupent particulièrement de cette branche, l'aient étudiée sous ce point de vue.

## II.<sup>e</sup> PARTIE

Application des principes généraux aux substances particulières et à leurs combinaisons principalement binaires.

*I.<sup>ère</sup> Section. Des masses des molécules, des substances particulières, et de leurs combinaisons binaires.*

J'ai annoncé dans l'avant-propos qu'ayant principalement pour but dans cette seconde partie à la détermination la plus probable de la masse des molécules des différentes substances particulières, et la vérification des lois que j'avais établi dans mes mémoires précédens sur les combinaisons binaires, ce serait à ce genre de combinaisons que je me



serai borné en général. On a vu dans la première partie que les composés appartenans aux corps organisés, et que M. Berzelius appelle *composés organiques* peuvent être regardés comme des *combinaisons binaires successives* d'un élément avec plusieurs autres, et il est aussi intéressant de voir si sous ce point de vue ces composés peuvent être ramenés à la théorie des multiples, à laquelle j'ai cherché à réduire toutes les combinaisons binaires, et à laquelle M. Berzelius avait cru devoir les soustraire-entièrement. Mais pour ne pas trop allonger cette seconde partie de mon mémoire, je ne m'y occuperai que de la détermination des masses des molécules des différens corps, qui jouent un plus grand rôle dans les fractions de la nature, et dans les opérations chimiques, et de leurs combinaisons binaires proprement dites; et je renvoi à un autre mémoire l'exposition de mes vues sur ces composés ternaires, et quaternaires que nous présentent le règne animal, et le règne végétal. Quant aux autres combinaisons des divers ordres je me borne, pour la plupart, à ce que j'en ai dit en général dans la première partie.

1. De l'oxygène et de l'hydrogène et de leur combinaison. Nous avons déjà dit que quelques chimistes supposent que l'eau est composée d'une molécule d'oxygène, et une d'hydrogène, et en conséquence ne prennent que la moitié du rapport présenté par la densité des deux gaz pour le rapport entre les masses des molécules de ces substances. Mais j'ai déjà allégué les motifs que nous avons de nous



en tenir au rapport des volumes , et des densités des gaz pour la détermination des nombres de molécules qui se combinent, et de la masse des molécules , et alors puisqu'un volume d'oxygène prend deux volumes d'hydrogène pour former l'eau , une molécule d'oxygène doit aussi être supposée en prendre deux d'hydrogène , et le rapport des masses des molécules doit être le même que celui de la densité des deux gaz et non celui de la proportion en poids , dans laquelle il se combinent.

Le rapport des densités des deux gaz , tel qu'il résultait des expériences plus exactes que l'on avait lors de la publication de mes mémoires , et celui que j'avais assigné en conséquence aux masses de leurs molécules s'approchait beaucoup de 15 à 1 , c'est-à-dire que la molécule de l'oxygène aurait été environ 15 fois celle de l'hydrogène. J'avais adopté à cet égard plus précisément 15,074 pour l'oxygène, en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, d'après les expériences de MM. Biot et Arago , qui donnaient pour la densité de gaz oxygène 1,10359 , et pour celle du gaz hydrogène 0,07321 , en prenant pour unité la densité de l'air. D'après cela, en prenant au contraire pour unité la densité du gaz oxygène , celle de l'hydrogène aurait été 0,066338 , et cette évaluation avait aussi été adoptée à très-peu-près par M. Berzelius. Mais M. Meinecke ( dans le mémoire déjà cité plus haut ) cherchant à déterminer les masses des molécules par des moyens entre celles qui résultent des proportions en poids dans les différentes combinaisons,

déterminations qu'il a cru devoir être plus exactes que celles par les densités des gaz, et appliquant cette méthode en particulier à l'oxygène et à l'hydrogène, trouva que le rapport dont il s'agit s'approchait beaucoup de celui de 16 à 1 au lieu de 15 à 1. Cette évaluation a été aussi adoptée par quelques autres chimistes, et dernièrement M. Berzelius par des expériences qu'il a faites avec M. Dulong sur la composition de l'eau en poids, et dont il rapporte le résultat dans son ouvrage cité plus haut, a trouvé que l'atome de l'hydrogène devait peser 0,062175 en prenant pour unité celui de l'oxygène, ce qui approche beaucoup de  $\frac{1}{16}$  ou 0,0625. D'un autre côté ayant répété les expériences directes sur la pesée spécifique du gaz hydrogène, ces chimistes l'ont trouvée réellement plus petite, que celle que lui avaient assignée MM. Biot et Arago, savoir seulement 0,0688 ou 0,0689 en prenant pour unité celle de l'air. Si l'on prend la moyenne 0,06885, et qu'on suppose la densité du gaz oxygène telle que l'ont déterminée Biot et Arago, cela donnerait 0,06239 ou à très-peu-près 0,0624 pour la masse de la molécule de l'hydrogène en prenant pour unité celle de l'oxygène, résultat peu différent de celui donné par la composition de l'eau en poids. M. Thomson a trouvé aussi dernièrement pour la densité du gaz hydrogène en prenant pour unité celle de l'air 0,06933, ce qui diffère peu du résultat de Berzelius. Tout paraît donc porter à croire, que la densité du gaz hydrogène avait été portée un peu trop haut dans les expériences de MM. Biot

et Arago, ce qui n'est pas étonnant, la grande légèreté de ce gaz rendant cette détermination très-difficile ; et puisque nous avons déterminé dans les mémoires précédens les molécules des autres gaz par leur densités, il paraît que l'on peut adopter maintenant le résultat moyen des expériences de Berzelius et Dulong faites, à ce qui paraît avec des soins particuliers, et évaluer ainsi la molécule de l'hydrogène, en prenant pour unité celle de l'oxygène à 0,0624, ce qui fait 16,026 pour l'oxygène en prenant pour unité celle de l'hydrogène ; valeurs fort-peu différentes de celles qu'adopte M. Berzelius en s'en tenant au résultat que lui a donné la composition de l'eau en poids, et que j'ai indiqué ci-dessus.

L'hydrogène et l'oxygène étant les deux gaz les plus connus, et qui jouent un plus grand rôle dans les combinaisons, ont été choisis en général, l'un ou l'autre pour servir d'unité aux masses des molécules des autres substances. Dalton avait adopté celle de l'hydrogène, comme la plus petite de toutes, en sorte que les autres pouvaient par là être approximativement exprimées par des nombres entiers, et j'avais moi-même adopté cette unité dans mes mémoires précédens. M. Davy s'y tient encore ; mais Thomson, Wollaston, Berzelius etc. ont préféré de prendre pour unité celle de l'oxygène ou un de ses aliquotes, comme un dixième, ou un centième, et cela paraît avoir prévalu parmi les chimistes. L'avantage réel qu'il paraît y avoir à cet égard, c'est que la densité du gaz hydrogène étant la plus

difficile à déterminer exactement si l'on venait à changer un peu le rapport de celle du gaz oxygène au gaz hydrogène ( comme nous venons de le faire nous même , d'après les dernières expériences ) il faudrait altérer tous les autres nombres , quoique le rapport avec l'oxygène restât le même , ce qui n'aura pas lieu en prenant celle de l'oxygène pour unité. Au reste en prenant ce parti , je crois qu'il vaut mieux prendre tout simplement la molécule de l'oxygène pour unité , au lieu de son dixième , ou centième , et exprimer les densités moindres par des fractions décimales , et c'est à cette unité que nous réduirons toutes les masses des molécules dans ce qui suit.

Quant à la molécule de l'eau qui résulte de la combinaison de l'oxygène , et de l'hydrogène , nous avons vu , que le volume de la vapeur d'eau étant double de celui de l'oxygène , ou égal à celui de l'hydrogène qui y entre , ( ce qui nous offre le premier exemple de notre règle générale 1.<sup>ère</sup> partie , 1.<sup>ère</sup> section n.<sup>o</sup> 3 ) , la molécule de l'eau , d'après notre théorie de la constitution des gaz , doit être à proprement parler la moitié de celle qui résulterait de l'union d'une molécule d'oxygène avec deux d'hydrogène , savoir selon notre dernière évaluation  $\frac{16+2}{2}$  ou 9 , ou plus exactement  $\frac{16,026+2}{2}$  ou 9,013 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène , et  $\frac{1+2\,0,0604}{2}$  ou 0,5624 , ou  $\frac{9}{16}$  à très-peu-près en prenant pour unité celle de l'oxygène. Je trouve d'après cela que la densité de la vapeur d'eau en prenant pour

unité-celle de l'air atmosphérique devrait être 0,62068, ou à-peu-près 0,621 : l'expérience a donné comme on sait à Gay-Lussac  $\frac{10}{16}$  ou 0,625. La véritable molécule de l'eau sera ainsi formée d'une demi-molécule d'oxygène, et de deux demi-molécules, ou une molécule entière d'hydrogène. Mais si, conformément à ce que j'ai dit dans la première partie, on ne veut pas avoir égard à la division de la molécule indiquée par le volume de la vapeur d'eau, et qu'on considère toujours le *nombre proportionnel* d'un composé comme la somme des molécules entières qu'on peut supposer y concourir, ce nombre pour l'eau aurait une valeur double de celle que nous venons d'assigner à sa molécule, savoir ce serait 18,026 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, et 1,1248 ou environ 1  $\frac{1}{8}$  en prenant pour unité celle de l'oxygène.

D'après les expériences récentes de M. Thénard l'eau peut s'oxygéner par des moyens particuliers qu'il a fait connaître, et selon les dernières notices que nous ont donné de ces expériences les *Annales de chimie et de physique*, il paraît que le *maximum* d'oxygène que l'eau peut absorber est un volume égal à celui qui appartient à sa composition, en sorte que l'eau oxygénée se trouve alors en contenir en tout le double de ce qui constitue l'eau ordinaire. Si l'on regarde le composé qui en résulte comme étant à proportions déterminées, l'eau oxygénée sera donc formée de volumes égaux de gaz hydrogène, et de gaz oxygène, et ce sera le degré d'oxidation de l'hydrogène immédiatement au-dessus de celui qui forme l'eau ; elle sera



à l'eau ordinaire ce que le gaz deutocide d'azote est au gaz protoxide. Les proportions indéfinies selon lesquelles l'eau peut s'oxygéner avant d'arriver à ce terme peuvent être regardées comme de simples solutions de ce nouveau composé dans l'eau en toutes proportions. On pourrait s'étonner que ce composé ne soit point acide, puisqu'il contient plus d'oxygène que celui qui constitue l'état neutre que l'eau nous présente; mais peut-être la rapide décomposition de ce composé, qui a lieu dans la plus part des circonstances, où il pourrait agir comme acide, est elle la cause qu'on n'a pu remarquer cette propriété. Au reste il faudra attendre de nouvelles expériences pour se former des idées justes de la nature de ce composé.

2. De l'azote, et de ses combinaisons avec l'oxygène, et l'hydrogène. Nous avons fixé dans les mémoires précédens la molécule de l'azote à 13,238 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, d'après les expériences de Biot et Arago sur les pesées spécifiques de ce gaz: mais d'après la nouvelle évaluation que nous avons adopté de la molécule de l'hydrogène, ce nombre devient 13,9733 on a peu-près 14. Si l'on veut prendre pour unité la molécule de l'oxygène, celle de l'azote, d'après les expériences de Biot et Arago se trouve 0,878161. M. Berzelius dans son dernier ouvrage, après la composition des nitrates a adopté 0,8863 pour ce dernier nombre; mais je crois qu'on peut s'en tenir à la détermination directe de la densité des gaz; d'ailleurs la



différence de deux nombres est fort-peu considérable (1).

Les combinaisons de l'azote avec l'oxygène ont été mieux examinées par MM. Davy et Gay-Lussac depuis la publication de mes mémoires : ces deux chimistes sont maintenant d'accord sur les proportions des élémens dans ces composés, dont l'ensemble forme la suite la plus étendue que nous ayons des différentes proportions dans lesquelles deux substances gazeuses peuvent se combiner, et présente différens points de vue nouveaux relativement à la théorie des proportions déterminées. Je vais donc reprendre ce sujet en entier.

Il est maintenant reconnu qu'un volume de gaz-azote forme les différens composés suivans, lorsqu'il est combiné avec les différens volumes d'oxygène ici indiqué.

Avec $\frac{1}{2}$ vol. d'oxygène	. . .	gaz protoxide d'azote
1 . . . . .		gaz nitreux, gaz deutoxide d'azote
1 $\frac{1}{2}$ . . . . .		gaz pernitreux ou hyponitreux de Gay-Lussac

---

(1) Quelques auteurs pour déterminer la densité de l'azote, ou de l'oxygène en prenant pour unité celle de l'air atmosphérique, considèrent celui-ci comme formé rigoureusement d'un volume d'oxygène, et quatre d'azote, comme si c'était un composé à proportions déterminées. On sait cependant que ce n'est qu'un mélange; il se peut que le rapport approché de 1 à 4 entre les volumes des deux gaz qui y entrent, dépende de quelque combinaison à proportions fixes qui dans l'origine des choses ait donné lieu à la formation de notre atmosphère; mais le mélange et altérations que l'atmosphère a pu subir dans la suite ne nous permettent plus de supposer ce rapport rigoureux, même dans cette hypothèse qui d'ailleurs n'a aucun fondement réel.

2	. . . . .	acide nitreux
2 $\frac{1}{2}$	. . . . .	acide nitrique.

Ainsi voilà une suite de doses par une progression non de volumes entiers, mais de demi-volumes, et par conséquent, selon nos idées, non de molécules intégrantes entières, mais de demi-molécules d'oxygène. Cependant le premier composé ne présente aucune difficulté à cet égard, puisqu'on peut le considérer comme formé d'un volume d'oxygène, et deux d'azote. Le second et le troisième sont aussi conformes à la théorie des combinaisons multiples, puisqu'ils sont composés de volumes entiers. Mais que dirait-on des deux autres, l'acide pernitreux, et l'acide nitrique? Si cela était nécessaire on pourrait supposer qu'une molécule d'azote prend immédiatement une molécule et demi d'oxygène dans le premier, et  $2\frac{1}{2}$  dans le second; ou bien on devrait dire, que deux molécules d'azote s'unissent immédiatement à trois, et à cinq molécules d'oxygène pour les former. Mais ces deux composés peuvent être ramenés aisement à la théorie des volumes multiples ou molécules entières par la combinaison de deux composés préexistens, et c'est ici la première application qui a présenté de cette manière de procéder, que nous avons annoncé en général dans la première partie. Et d'abord si l'on combine d'un côté un volume d'azote avec un volume égal d'oxygène, ce qui forme du deutocide d'azote, et de l'autre un volume d'azote égal au premier avec deux volumes d'oxygène, ce qui forme de l'acide nitreux, ces deux

composés combinés ensemble nous en donneront un où l'azote entrera pour deux volumes, et l'oxygène pour trois, ce qui formera le rapport de 2 à 3 ou 1 à  $1\frac{1}{2}$  qui constitue le gaz pernitreux. Cette explication avait déjà été essentiellement proposée par M. Ampère pour expliquer la formation de la molécule de cet acide, qu'il avait déjà admis d'après Berzelius. Quant à l'acide nitrique M. Ampère avait proposé aussi deux manières d'en concevoir la formation; mais elles sont insuffisantes pour la concilier avec la théorie des multiples, ou du moins ne sont pas fondées sur les composés préexistans que nous croyons le moyen le plus convenable pour cet objet. Quant à nous, l'explication que nous venons de voir de la formation de l'acide pernitreux nous met sur la voie pour en trouver une analogue pour l'acide nitrique. Il suffit de supposer que cet acide est une combinaison intermédiaire entre l'acide nitreux qui contient deux volumes d'oxygène pour un d'azote, et un acide supérieur qui serait formé d'un volume d'azote et trois d'oxygène, et qui serait par conséquent analogue à l'acide sulfurique par sa composition; en effet si un volume d'azote au premier état de combinaison vient ensuite à se réunir avec un volume égal d'azote au second état, il en résultera un composé où l'azote entrera pour deux volumes, et l'oxygène pour cinq, ce qui donne la proportion de 2 à 5, ou de 1 à  $2\frac{1}{2}$  qui constitue l'acide nitrique.

En général toute combinaison de deux gaz, où l'un d'eux

entre par demi-volumes, relativement à un volume entier de l'autre, c'est-à-dire dans le rapport  $m + \frac{1}{2}$  à 1,  $m$  étant un nombre entier quelconque pourra toujours être expliquée de cette manière par la combinaison de volumes égaux de ce second composant portés d'abord à un état de combinaison avec les deux nombres entiers plus prochains  $m$ , et  $m + 1$  de molécules du premier; car en réunissant les deux volumes en cet état, la proportion de deux substances en volume sera de 2 à  $2m + 1$  ou de 1 à  $m + \frac{1}{2}$  comme on le demande. J'observerai ici que d'après cette règle on pourrait aussi considérer la combinaison qui forme le gaz protoxide d'azote, comme consistant dans la réunion d'un volume ou molécule de gaz-azote simple avec un volume ou molécule de gaz-azote préalablement combiné avec un volume égal d'oxygène; car c'est ce qu'indique la règle pour ce cas, en y faisant  $m = 0$ . Mais il n'y a rien ici qui nous oblige à admettre cette complication, puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, cette combinaison peut être considérée également comme résultant d'une molécule d'oxygène avec deux d'azote. On pourrait néanmoins recourir à cet expédient, si on voulait absolument faire de tous les composés connus d'azote et d'oxygène une série continue, dont l'azote fut considéré comme la base, et qu'on voulait néanmoins les ramener tous à la théorie des multiples.

Resterait maintenant à savoir quelle est réellement la composition de la molécule qui appartient à ces différentes

combinaisons , c'est-à-dire s'il y a ou non , et jusqu'à quel point , division des molécules de leurs composans , et pour cela il faudrait connaître les volumes de ces composés à l'état de gaz ou de vapeurs relativement à celui de leurs gaz composans ; mais nous n'avons cette connaissance , que pour quelques uns d'entr'eux.

Et d'abord quant au volume du gaz protoxide d'azote on sait qu'il est égal à celui de l'azote , ou double de celui de l'oxygène qui y entre , second exemple de la règle générale de la duplication citée ci-dessus. Ainsi il y a conformément à cette règle division de la molécule qui résulterait d'une molécule d'oxygène et deux d'azote , c'est-à-dire que la molécule de ce gaz n'est réellement composée que d'une molécule d'azote , et une demi-molécule d'oxygène.

Le volume du gaz nitreux ou deutoxide d'azote est , comme on sait , égal à la somme des volumes de ses deux composans , ou au double de celui de chacun d'eux , ce qui est encore conforme au principe cité ; ou autrement la molécule de ce composé est formée d'une demi-molécule d'azote , et d'une demi-molécule d'oxygène.

Le volume de l'acide pernitreux à l'état de gaz , relativement à celui de ses composans n'a pas été déterminé que je sache , et par conséquent la composition réelle de sa molécule est encore inconnue.

M. Gay-Lussac avait considéré l'acide nitreux comme un gaz permanent , et avait cru trouver que son volume était



égal à celui de l'azote qui y entre , en sorte qu'il n'y aurait pas redoublement de volume , ou division de la molécule composée , et ce serait là le premier exemple d'une exception à la règle générale plusieurs fois citée. Mais M. Dulong a fait voir depuis que l'acide nitreux est naturellement liquide par lui-même , sous la pression atmosphérique à une température inférieure à  $28^{\circ}$ , et ne passe à l'état de gaz ou vapeur qu'à une température supérieure à celle-là , ou par son mélange avec les gaz permanens. Il reste d'après cela des doutes sur l'exactitude du résultat de M. Gay-Lussac relativement au volume de cette vapeur , et il faudra attendre d'autres expériences pour décider ce point.

Enfin l'acide nitrique étant inconnu à l'état libre , et n'existant qu'en combinaison avec l'eau , et avec les bases ratifiables , on ne peut rien savoir sur le volume qu'il aurait à l'état de gaz relativement à ses composans , ni par conséquent sur la composition réelle de sa molécule.

J'ai considéré ci-dessus l'acide supérieur à l'acide nitrique , et qui serait formé d'un volume d'azote avec trois volumes d'hydrogène , comme entièrement hypothétique , et servant seulement à expliquer la constitution de l'acide nitrique , selon la théorie des multiples ; mais les dernières expériences de Thénard , sur l'oxigénation des acides paraissent maintenant nous présenter cet acide , comme réellement existant dans un état isolé de tout autre degré d'oxigénation de l'azote ; le premier degré d'oxigénation de



l'acide nitrique que ce chimiste a obtenu par les moyens particuliers dont il s'est servi dans ces expériences, présente en effet cette proportion, en sorte qu'on aurait ainsi une série de six degrés différens d'oxigénation de l'azote, dans lesquels un volume de celui-ci prendrait successivement des demi-volumes d'oxigène jusqu'à six demi-volumes, ou trois volumes entiers. Il paraît même que Thénard a obtenu par ce moyen des degrés encore supérieurs d'oxigénation de cet acide, ainsi que des autres ; mais il faudra attendre des travaux ultérieurs pour savoir dans quel état on peut concevoir ces sortes de composés où l'eau doit nécessairement concourir aussi à retenir l'oxigène.

Mais en nous tenant aux composés bien avérés d'azote, et d'oxigène, on voit qu'il en résulte que les composés par demi-volumes, ou selon notre théorie par demi-molécules, de quelque manière qu'on les conçoive peuvent très-bien avoir lieu, et qu'en conséquence de ce que par exemple, deux substances puissent former entr'elles deux composés dans lesquels l'une d'elles prenne des doses de l'autre qui soient entr'elles comme 2 à 3, on ne peut pas en conclure d'une manière certaine, qu'une molécule de la première prenne deux molécules de la seconde dans le premier composé, et trois molécules dans le second, ni s'appuyer sur cela pour déterminer les masses relatives de ces molécules, ou les densités que ces deux substances auraient à l'état de gaz ; car tel est précisément le cas du gaz protoxide d'azote, et de l'acide pernitreux, dont le premier

cependant renferme une demi-molécule seulement, et le second une molécule et demie d'oxygène sur une molécule d'azote, lorsqu'on détermine ces molécules par les volumes des gaz. Cette remarque doit être prise en considération, pour la détermination de la molécule des autres substances qu'on ne peut observer à l'état gazeux, dans la suite de ce mémoire.

Quant aux combinaisons d'azote et d'hydrogène, nous n'en connaissons jusqu'ici qu'une seule, qui est l'ammoniaque, et il n'a été rien ajouté à ce qu'on savait de sa composition à l'époque de mes mémoires. Un volume d'azote prend, comme on sait 3 volumes d'hydrogène pour la former, et le volume du gaz résultant est double de celui de l'azote qui y entre, toujours conformément à notre règle générale; en sorte que la molécule de l'ammoniaque est réellement formé d'une demi-molécule d'azote, et d'une molécule et demie d'hydrogène, telle que ces molécules sont déterminées par les volumes des gaz. J'ajouterai seulement ici que d'après la nouvelle évaluation que nous avons admise pour la densité du gaz hydrogène, savoir 0,06885 en prenant pour unité la densité de l'air, en y joignant la densité du gaz azote selon Biot et Arago, celle calculée du gaz ammoniaque doit être 0,58784 dans la même unité, ce qui diffère encore assez peu de 0,59669 qu'ont trouvé MM. Biot et Arago par leurs expériences directes.

Avant de quitter le sujet de l'azote je dois encore rappeler ici que M. Berzelius regarde l'azote comme un oxide

d'une autre substance inconnue à l'état libre, et qu'il appelle *nitricum* ; en sorte que l'azote résulterait de l'union d'une molécule de *nitricum*, et une d'oxygène, mais avec partage en deux de la molécule résultante. En effet il assigne dans son dernier ouvrage à la molécule du *nitricum* le nombre 0,7726 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène, d'où il suit que la densité de l'azote, ou, comme il l'appelle, du *suboxidum nitricum*, serait selon son hypothèse  $\frac{1,57726}{2}$  ou 0,8863, ce qui est comme je l'ai dit plus haut son évaluation de la densité ou molécule de l'azote, en prenant pour unité celle de l'oxygène. Il s'appuie, comme nous avons déjà eu occasion de le dire, à cet égard, sur ses lois générales de la composition des sels, appliquées aux nitrates, lesquelles viennent en effet à se vérifier dans cette hypothèse, qui change tous les degrés d'oxygénation de l'azote. Il avait de même admis autrefois, d'après des raisons de même genre, que le radical de l'azote était le même que celui de l'hydrogène, qu'il supposait être aussi un oxide, et qu'en conséquence l'hydrogène, l'azote, et ses différens degrés d'oxygénation, et l'eau étaient autant de différens degrés d'oxygénation de ce même radical qu'il appelait *ammonium*.

Il a maintenant renoncé à cette dernière supposition, et dans son dernier ouvrage il regarde l'hydrogène comme simple. L'hypothèse du *nitricum* y est encore suivie ; mais il paraît aussi par ce qu'il dit dans son mémoire sur l'acide phosphorique, qu'il regarde maintenant comme moins

décisives les raisons qui l'avaient porté à l'adopter. En effet nous avons déjà remarqué dans la première partie de ce mémoire, que la composition des nitrates s'accorde très-bien avec la théorie de l'azote simple, pourvu qu'on renonce à la généralité de la loi de formation des sels, que M. Berzelius n'avait établie que sur les sels dont les acides ont une constitution différente; en sorte que l'hypothèse de la composition de l'azote n'a plus aucun fondement réel (1).

3. Du chlore, et de ses combinaisons avec l'hydrogène, l'oxygène, et l'azote. J'avais déjà embrassé dans mes mémoires la théorie d'après laquelle le chlore est considéré comme substance simple conformément aux expériences, et aux réflexions de M. Davy (2), depuis lors cette théorie

---

(1) M. Falekner dans un ouvrage publié en Allemand à Bâle en 1819 *sur les proportions, et les lois d'après lesquelles se combinent les élémens des corps*, dont on trouve un extrait dans la *Bibl. universelle*, juin et août 1819, et qui est une espèce de notice des résultats des travaux des chimistes à cet égard, dans laquelle l'auteur suit en général les hypothèses de M. Berzelius, renchérit sur les idées de celui-ci relativement au *nitricum*, et il paraît porté à croire que tous les corps sont composés d'oxygène, de *nitricum*, et d'hydrogène, mais ses motifs paraîtront bien faibles. Il conjecture par exemple que le soufre contient la moitié de son poids d'oxygène parce que les substances susceptibles de s'unir à l'oxygène et au soufre prennent un poids double de celui-ci que du premier, ce qui cependant ne prouve autre chose si non que la molécule du soufre est à-très-peu-près double de celle de l'oxygène comme nous verrons ci-après.

(2) C'est en effet d'après les réflexions de M. Davy que j'avais embrassé alors cette opinion. Ce n'est qu'après la publication de mon dernier mémoire, qui a été imprimé dans le *journal de physique* en février 1814, que j'ai vu

a été généralement adoptée par la plupart des chimistes. M. Berzelius cependant soutient encore l'ancien système de l'acide muriatique, et j'examinerai ci-après ses motifs. Pour le moment nous suivrons le système que j'avais déjà adopté.

J'avais admis dans mes mémoires pour la détermination de la molécule du chlore le résultat de la mesure immédiate de sa densité à l'état de gaz donnée par MM. Gay-Lussac et Thénard, savoir 2,470 en prenant pour unité la densité de l'air, ce qui donnait 33,74 pour cette molécule en prenant pour unité celle de l'hydrogène, telle que je l'admettais alors. Je vois que M. Gay-Lussac a préféré depuis lui-même de déduire la densité du gaz de chlore de celle de l'acide hydrochlorique ou acide muriatique, qui est selon Biot et Gay-Lussac 1,278 en prenant pour unité la densité de l'air, et de la composition bien connue de cet acide en chlore et hydrogène. Alors la densité du gaz

---

dans le mémoire de M. Gay-Lussac sur l'Iode, imprimé dans les *Annales de chimie* en juillet de la même année, que MM. Gay-Lussac et Thénard avaient proposé les premiers l'hypothèse de la simplicité du chlore dans un mémoire lu à la Société d'Arcueil en février 1809, que MM. Ampère et Dulong l'avaient adopté dès lors, et que M. Gay-Lussac l'avait depuis présentée comme la plus probable dans ses cours; car dans le 2.<sup>e</sup> volume de la Société d'Arcueil, qui a été publié en 1809, tout en rapportant leurs expériences sur le chlore, qui leur avaient suggéré cette idée, MM. Gay-Lussac et Thénard s'en tiennent encore à l'ancienne théorie, sans doute par déférence pour l'opinion de M. Berthollet, qui ne renonça définitivement à cette théorie que dans un mémoire en date du 10 avril 1816, inséré dans le 3.<sup>e</sup> volume de la Société d'Arcueil.



de chlore, comme je l'avais déjà remarqué dans mes mémoires, aurait été, d'après la densité de l'hydrogène alors admise, 2,483 en prenant pour unité la densité de l'air, et 33,61 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, et cela aurait donné 2,2499 en prenant pour unité la densité ou molécule de l'oxygène. Mais la nouvelle évaluation que nous avons adoptée pour la densité du gaz hydrogène, savoir 0,06885 en prenant pour unité celle de l'air change un peu les résultats de ce calcul, et donne 2,487 pour la densité du gaz de chlore dans la même unité; 36,124 pour sa densité ou molécule en prenant pour unité celle de l'hydrogène, et 2,2535 pour la même densité ou molécule en prenant pour unité celle de l'oxygène. D'après les calculs de M. Berzelius sur la composition du chlorure d'argent au lieu de ce dernier nombre on aurait 2,21825; mais je m'en tiens à la détermination par les densités des gaz. La molécule du chlore sera donc à très-peu-près 2 fois et un quart la molécule de l'oxygène. M. Davy, et autres chimistes qui distinguent le *nombre proportionnel* de la densité des gaz adoptent le double des nombres indiqués pour le nombre proportionnel du chlore, savoir 67 ou 68 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, ancienne évaluation, et environ  $4\frac{1}{3}$  en prenant pour unité la molécule de l'oxygène: mais j'ai déjà exposé les raisons qui me semblent devoir déterminer les chimistes à renoncer à ce double emploi de la théorie des proportions déterminées, qui ne fait qu'introduire de la confusion dans



les combinaisons binaires. Nous ne nous y arrêterons pas d'avantage.

Mais nos connaissances sur les combinaisons du chlore et de l'oxygène ont été fort augmentées depuis la publication de mes mémoires, et elles nous offrent des considérations importantes relativement à la théorie: et d'abord il paraît reconnu que le gaz découvert par M. Davy, et qu'il avait nommé *euchlorine* n'était pas pur, et qu'en conséquence les expériences par lesquelles il avait cru reconnaître dans ce gaz un volume qui avait un rapport assez compliqué au volume de ses gaz composans, et que j'ai rapportées dans mon 2.<sup>e</sup> mémoire ne méritent pas confiance. M. Gay-Lussac avait même supposé d'abord que ce gaz pouvait n'être qu'un mélange de chlore, et d'un autre gaz dont il sera parlé dans un moment, et auquel il avait en conséquence appliqué le nom d'*euchlorine*; cependant d'après des expériences postérieures il pense qu'abstraction faite de tout mélange étranger, le gaz *euchlorine* de Davy est une véritable combinaison particulière, et que la proportion du chlore et de l'oxygène y est de 2 de chlore, et 1 d'oxygène en volume, comme l'avait déjà admis M. Davy. Gay-Lussac n'établit point par ses expériences le rapport de son volume à celui de ses composans; mais comme M. Davy avait trouvé ce volume d'un quart plus grand que celui du chlore qui y entre, on ne peut guère douter que son véritable volume, délivré de l'erreur provenant de l'impureté du gaz examiné par Davy, ne soit égal à celui du chlore,

ou double de celui de l'oxygène, ce qui fait rentrer ce gaz dans notre règle générale du partage de la molécule. On doit aujourd'hui appeller ce gaz, *gaz protoxide de chlore*, et on voit que sa composition est tout-à-fait analogue à celle du *gaz protoxide d'azote*.

Davy et le Comte de Stadion à-peu-près en même tems ont ensuite découvert un autre gaz composé de chlore, et d'oxygène, dans lequel, selon les expériences de Stadion le rapport du chlore à l'oxygène en volume est de 2 à 3 ou 1 à  $1\frac{1}{2}$ . M. Gay-Lussac croit ce résultat inexact ( annales de chimie et de physique août 1818 ), et trouve par ces expériences le rapport de 1 à 2 : c'est celui que M. Davy avait aussi adopté d'après les siennes, qui même donnaient immédiatement un peu moins de chlore, savoir 0,7, ou 0,9 sur 2 d'oxygène ( annales de chimie et de physique janvier 1816 ); mais d'après ce que je dirai ci-après en parlant d'un autre composé de chlore et d'oxygène, il paraît que le résultat de Stadion est le seul véritable, et en conséquence je considère ce composé comme analogue par sa composition à l'acide pernitreux, au lieu que selon Gay-Lussac, et Davy il serait analogue à l'acide nitreux. Quant au volume du gaz relativement à celui de ses composans les expériences des trois chimistes dont je viens de parler s'accordent à le donner égal à celui de l'oxygène qui y entre, ce qui revient à dire, selon le Comte de Stadion dans le rapport de 3 à 2 à celui du chlore, et selon Gay-Lussac et Davy, double, ou un peu plus que double de celui du

chlore. Il pouvait paraître probable, d'après la règle générale que nous avons vu déjà vérifiée dans un si grand nombre de cas, que c'est le double juste, conformément au résultat de Gay-Lussac, ce qui ferait, selon l'analyse de Stadion que nous avons d'ailleurs adopté  $1\frac{1}{3}$  de celui de l'oxygène au lieu de 1 juste que les expériences indiquent. Mais l'analogie n'est pas ici parfaite avec les autres cas : car il s'agit d'une combinaison en apparence fractionnaire qu'on ne peut ramener à la théorie des multiples que par l'union de deux composés préexistans, comme nous l'avons expliqué pour les combinaisons de l'azote, genre de combinaison pour lequel nous n'avons vu encore aucun exemple d'application de notre règle, puisque nous ne connaissons pas encore le volume de l'acide pernitreux, en état de gaz relativement au volume de ses composans, ce qui serait l'analogue du cas dont il s'agit. Pour que l'application complète de cette règle pût avoir lieu ici, il faudrait que le partage de la molécule eût lieu également dans les deux molécules de chlore qui se joignent l'une avec une molécule, l'autre avec deux molécules d'oxygène ; mais il se peut que ce partage n'ait lieu que pour l'une de ces molécules, au moins dans ce cas de combinaison secondaire entre les deux degrés d'oxidation, quelle que soit leur constitution à l'état libre, puisque nous savons qu'il y a quelques cas, où le partage n'a pas lieu même pour les combinaisons immédiatement multiples. Dans cette hypothèse les deux molécules de chlore en feraient trois du

nouveau composé, ou ce qui revient au même le volume du gaz composé serait à celui du chlore dans le rapport de 3 à 2, c'est-à-dire selon l'analyse du Comte de Stadion égal à celui de l'oxygène, et le résultat des expériences de ce chimiste serait ainsi juste à tous égards, tandis que celui des deux autres chimistes ne le serait que par rapport à l'égalité de volume entre le gaz; et l'oxygène y contenu, et il y aurait eu erreur dans leurs déterminations de la quantité de chlore. C'est là, je crois, la conclusion à laquelle il faut s'arrêter dans l'état actuel de nos connaissances, pour s'éloigner le moins possible des résultats de l'expérience; et elle est très-intéressante pour la théorie des volumes; car elle nous présente une application de cette théorie un genre particulier, et dont nous n'avions pas encore vu d'autre exemple. Ce gaz est celui auquel M. Gay-Lussac avait appliqué, comme nous avons dit, le nom de *gaz euchlorine* donné par Davy au précédent ( *Annales de chimie et de physique* février 1816 ) : aujourd'hui il l'appelle avec le Comte de Stadion *gaz deutoxide de chlore*. J'ajouterai ici que la composition que nous venons d'attribuer à ce gaz d'après les expériences du Comte de Stadion paraît aussi admise par M. Dulong; car il dit dans son *Mémoire sur les combinaisons du phosphore*, qu'il serait facile de prouver qu'un composé de chlore, et d'oxygène dans ces proportions existe, et il l'appelle *acide chloreux*; mais il ne s'explique pas d'avantage.

M. Gay-Lussac a fait voir d'un autre côté que l'acide

des sels qu'on appelait *muriales oxigénés*, ou *suroxigénés* était un véritable *acide chlorique*, composé de chlore, et d'oxygène dans la proportion en volume de 2 à 5 ou de 1 à 2  $\frac{1}{2}$ , et par là parfaitement analogue à l'acide nitrique. Cet acide peut s'obtenir dégagé de ses combinaisons avec les bases par les procédés indiqués par ce chimiste, mais seulement à l'aide de l'eau, avec laquelle il reste en combinaison; le volume qu'il aurait à l'état de gaz est donc inconnu.

Enfin M. le Comte de Stadion a trouvé que par des procédés particuliers on pouvait encore oxigéner ultérieurement cet acide chlorique, et le convertir ainsi en un autre acide, susceptible aussi de combinaison avec les bases, et qu'il a nommé *acide chlorique oxigéné*. Il résulte de l'analyse qu'il en a donnée que pour former cet acide un volume de chlore prend trois volumes et demi d'oxygène. M. Gay-Lussac avait jeté des doutes sur cette composition, parce qu'elle ne pouvait s'accorder avec celle qu'il a attribué au gaz deutoxide de chlore d'après ses expériences, et que nous avons rapportée ci-dessus, d'après les circonstances de sa formation par l'action de l'acide sulfurique sur le chlorate de potasse, et pour obtenir cet accord il supposait que l'acide chlorique oxigéné est formé d'un volume de chlore, et trois d'oxygène, ou d'après sa manière d'évaluer la molécule du chlore, d'une proportion de chlore, et six d'oxygène. Mais depuis ayant répété les expériences du Comte de Stadion, il les a trouvées exactes ( *Annales de chimie et de physique*



octobre 1818 ), et qu'une proportion de chlore prend en effet , comme il s'exprime sept proportions d'oxygène au lieu de six pour former cet acide , ce qui répond à la composition en volume indiquée par le Comte de Stadion. Or si cela est , les expériences de Stadion doivent être exactes aussi par rapport à la composition du gaz deutoxide de chlore , et on doit admettre celle-ci telle qu'il l'a indiquée, et que nous avons adopté ci-dessus d'après lui , au lieu de celle qui résultait des expériences de Gay-Lussac ; car cette dernière ne s'accorde plus avec la composition de l'acide chlorique oxygéné , et sa formation , tandis que les deux résultats de Stadion s'accordent entr'eux à cet égard , ainsi que M. Gay-Lussac l'a remarqué lui-même. En effet en admettant que le gaz deutoxide contienne une molécule et demie , et le gaz acide chlorique oxygéné trois molécules et demie d'oxygène pour une de chlore , si l'on conçoit le chlorate sur lequel on verse de l'acide sulfurique divisé en deux parties égales , l'acide de l'un d'elles , qui contient  $2 \frac{1}{2}$  molécules d'oxygène pour une de chlore se réduira à l'état de deutoxide en perdant une molécule d'oxygène , et cette molécule se portant sur l'acide de l'autre portion le changera en acide chlorique oxygéné , conformément à ce qu'on observe en ce cas. Tout porte donc à croire que les proportions trouvées par le Comte de Stadion sont les vraies, soit par rapport au gaz deutoxide , soit par rapport à l'acide chlorique oxygéné. Au reste ce dernier ne peut exister hors de son union avec l'eau , et avec les bases , et on ne



connait pas par conséquent la constitution réelle de sa molécule, ou le volume qu'il aurait à l'état de gaz par rapport au volume de ses gaz composans.

D'après cet exposé on voit qu'on connaît actuellement quatre composés de chlore, et d'oxygène, dans lesquels un volume de chlore s'adjoint respectivement  $\frac{1}{2}$ ,  $1 \frac{1}{2}$ ,  $2 \frac{1}{2}$ , et  $3 \frac{1}{2}$  volumes d'oxygène; il y aurait d'après cela cette différence entre la série présentée à cet égard par le chlore, et celle qui a lieu pour l'azote, que dans celle-ci les oxygénations successives se font par l'addition de demi-molécules sans aucun intervalle, et en passant par conséquent aussi par les multiples immédiats 1, 2, etc. au lieu que pour le chlore elle se fait de deux en deux demi-molécules seulement, et en sorte que les nombres entiers sont exclus. Ces combinaisons par nombres entiers doivent cependant être supposées, et continuées implicitement dans les combinaisons intermédiaires observées, pour les ramener à la théorie des multiples, comme nous l'avons expliqué en parlant des degrés de l'oxygénation de l'azote, en sorte que le degré  $1 \frac{1}{2}$  résultera de l'union d'une molécule à 1 d'oxygénation avec une molécule à 2, le degré  $2 \frac{1}{2}$  d'une molécule à 2 avec une à 3, et le degré  $3 \frac{1}{2}$  d'une molécule à 3 et d'une à 4; mais par quelque circonstance qui nous est inconnue, et qui doit tenir à la nature même du chlore ces degrés d'oxygénation par nombres entiers ne peuvent ici se former qu'autant qu'ils se réunissent en même tems deux à deux, pour former les degrés intermédiaires qu'on observe.

On peut voir par ce que dit M. Berzelius dans son mémoire intitulé *Expériences pour déterminer la composition de plusieurs combinaisons inorganiques etc.* ( annales de chimie et de physique mai et suiv. 1819 ) en raisonnant dans l'hypothèse du chlore simple, qu'il adopte les mêmes résultats que je viens d'indiquer pour les degrés d'oxygénation du chlore, et qu'il donne en particulier au deutroxyde, qu'il considère, ainsi que Dulong comme un véritable *acide chloreux* la même composition que je lui ai attribuée d'après le Comte de Stadion; seulement il regarde encore comme douteux, quant au degré plus élevé découvert par Stadion, si la quantité d'oxygène y est 6 ou 7, c'est-à-dire en prenant pour unité le volume du chlore 3 ou  $3\frac{1}{2}$ , et dans le tableau annexé à son *Essai sur la théorie etc.* il ne parle pas même de ce composé; quoique les expériences de Stadion et de Gay-Lussac s'accordent comme on a vu, sur le nombre fractionnaire que j'ai adopté. Berzelius tire de cette série même, toute fractionnaire, des oxidations du chlore dans la supposition de sa simplicité un argument en faveur de son hypothèse sur sa composition, dont il sera encore parlé ci-après, et qui ramènerait la série à des nombres entiers, comme nous verrons; mais ces combinaisons fractionnaires se trouvent aussi dans les degrés d'oxydation d'autres substances, sur la simplicité desquelles M. Berzelius n'élève aucun doute, et se ramènent elles-mêmes, comme on a vu, à la théorie des multiples, et il n'y a rien de particulier ici que la non existence

dés composés en nombres entiers , pour la réunion desquels on peut les supposer formés , en état d'isolement , du moins dans l'état actuel de nos connaissances.

Les expériences récentes de M. Thénard nous apprennent que l'acide hydrochlorique , en état de solution dans l'eau peut s'oxygéner à un très-haut degré , par les procédés qu'il a indiqués , et si cet oxygène commençait à s'unir à l'hydrogène de l'acide pour le convertir en eau , et se portait ensuite sur le chlore devenu libre , cela nous présenterait d'autres degrés d'oxidation du chlore supérieurs à ceux que nous avons admis , mais c'est ce qui ne paraît pas puisque l'acide hydrochlorique dans ces expériences acquiert déjà des propriétés particulières par une dose d'oxygène qui serait seulement suffisante à convertir en eau l'hydrogène qu'il contient , en sorte que si cette oxygénation se rapportait immédiatement à l'acide , il en résulterait plutôt des composés ternaires de chlore , d'hydrogène , et d'oxygène ; mais probablement cet oxygène doit être considéré comme réuni à l'eau , vu surtout la grande quantité qui s'en absorbe relativement au volume du gaz acide hydrochlorique qui y est dissous , et cet acide ne fait que favoriser cette union par sa présence (1).

---

(1) Cela ne paraît presque plus douteux , depuis que M. Thénard a découvert que l'eau toute seule est susceptible d'oxygénation comme nous l'avons vu à l'article de l'oxygène et de l'hydrogène , et il est probable que M. Thénard lui-même est actuellement de cet avis.

Nous devrions maintenant passer aux combinaisons du chlore avec l'azote, mais j'ai déjà fait mention dans mon second mémoire du seul composé de ce genre qu'on connaisse, qui est cette huile détonante découverte par M. Dulong, et de la différence des résultats trouvés par des chimistes différens sur la composition de ce corps, un volume de gaz azote prenant pour le former trois volumes de gaz de chlore selon les expériences de MM. Porret, Wilson, et Kirk, et quatre volumes selon celles de M. Davy. Je ne sache que ce doute ait été levé par d'autres expériences, et les analogies que quelques auteurs ont suivies pour se fixer à l'un ou à l'autre de ces résultats ne paraissent présenter rien de certain. Le volume qu'aurait ce composé à l'état gazeux, relativement à ses composans, est aussi inconnu.

Je finirai donc cet article de chlore par quelques considérations sur la manière dont Berzelius, qui tient encore, comme nous avons dit, à la théorie de l'acide muriatique, conçoit la composition du chlore et de ses degrés d'oxidation dans cette théorie. Il suppose que le chlore, ou acide muriatique oxigéné est composé d'une molécule d'un radical particulier, qu'il appelle *muriaticum*, inconnu à l'état libre, et de trois molécules d'oxigène avec redoublement de volume relativement au radical. Lorsque l'hydrogène s'unit au chlore pour former l'acide muriatique gazeux, il suppose, ainsi que les autres chimistes qui suivent cette théorie, que cet hydrogène ne fait que former de l'eau avec une des

trois molécules d'oxygène, en sorte que l'acide sec qui se trouve dans ce gaz combiné avec l'eau, est formé suivant lui d'une molécule de *muriatricum*, et deux d'oxygène. L'évaluation qu'il donne de la molécule du *muriatricum* est conforme à ces suppositions, car il l'a fait égale à 1,4265 en prenant pour unité celle de l'oxygène; d'où il suit que la molécule de l'acide muriatique oxygéné, qu'il appelle *superoxidum muriatosum* serait 4,4265, ou par la division ordinaire en deux, 2,21325, qui est, comme nous avons déjà dit, la densité du gaz chlore d'après ses évaluations. En ajoutant à ce gaz la moitié de son volume d'oxygène, mais qui forme un volume égal à celui du *muriatricum* qui y est supposé contenu on a le gaz *euchlorine* de Davy, composé selon Berzelius d'une molécule de *muriatricum*, et 4 d'oxygène; et qu'il appelle *superoxidum muriatricum*. En ajoutant encore un volume d'oxygène égal à celui du chlore primitivement employé, ou deux volumes relativement au volume supposé de *muriatricum*, on obtient notre gaz deutocide de chlore, qu'il croit composé d'une molécule de *muriatricum* et 6 d'oxygène, et qu'il appelle *acidum oximuriatosum*. Enfin une autre addition semblable d'oxygène change celui-ci dans notre acide chlorique, formé selon Berzelius d'une molécule de *muriatricum* et 8 d'oxygène, et qu'il appelle *acidum oximuriatricum*. Ainsi par l'oxygène primitivement supposé dans le chlore, et dans l'acide muriatique sec, les différens degrés d'oxidation fractionnaire du chlore sont ramenés à des doses multiples et



en nombres entiers , abstraction faite de *l'acide chlorique oxygéné* du Comte de Stadion que Berzelius ne fait pas entrer dans la série à cause du doute qui lui reste encore sur sa composition. Nous avons déjà dit que M. Berzelius tire de cette simplicité un argument en faveur de son hypothèse , et nous avons vu combien cet argument doit paraître foible ; mais les principales raisons sur lesquelles Berzelius s'appuie pour soutenir ce système sont toujours tirées de la composition des sels , et en particulier de la proportion d'eau de cristallisation dans les muriates. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans des discussions particulières à cet égard ; mais en général ces preuves indirectes souvent fondées sur des expériences plus ou moins inexactes , et quelque fois sur des lois hypothétiques qu'on étend au-delà de leurs justes bornes , comme on l'a vu pour les nitrates , ne me paraissent pas pouvoir suffire pour établir une composition qu'aucune expérience directe n'indique , et il est probable que d'après des expériences plus exactes , et de nouvelles réflexions Berzelius lui-même finira par embrasser l'opinion devenue maintenant presque générale de la simplicité du chlore.

4. Du carbone et de ses combinaisons avec les substances précédentes. Nous avons parcouru celles des substances simples qui se présentent sous forme gazeuse , et où par conséquent la théorie des rapports simples en volume s'applique immédiatement et directement à la théorie des proportions déterminées. Nous passons maintenant aux autres



substances dont la densité à l'état de gaz n'est pas connue directement, et qui par conséquent ne peuvent être rapportées à la théorie des volumes que par des conjectures plus ou moins probables, et nous commençons par le carbone qui est une des plus connues de ce genre.

C'est principalement par la considération des combinaisons de carbone avec l'oxygène que j'ai cherché à déterminer la masse de sa molécule, ou la densité présumée de son gaz. Nous en connaissons deux, le gaz acide carbonique, et le gaz oxide de carbone. Dans le premier il est reconnu que le gaz oxygène y entre par un volume égal à celui du gaz composé; si donc on admet qu'il y a division de la molécule composée, ou redoublement de volume comme cela arrive dans la plupart des combinaisons binaires, ainsi que nous en avons déjà vu de nombreux exemples, il faut que le carbone y entre par la moitié de ce volume, d'où l'on déduit d'après la densité du gaz acide carbonique selon les expériences de MM. Biot et Arago, que la densité du gaz de carbone serait 0,832 en prenant pour unité celle de l'air et 11,36 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, telle qu'elle résultait des expériences de Biot et Arago, ou autrement que la molécule du carbone serait à celle de l'hydrogène comme 11,36 à 1.

Tel est le raisonnement que j'avais fait dans mes mémoires précédens, et je n'y vois rien à y changer maintenant, que le résultat numérique de la densité du gaz de carbone relativement à l'hydrogène, d'après la nouvelle évaluation

de la densité de ce dernier que j'ai adopté ci-dessus : il en résulte 12,0823 pour la densité du gaz de carbone, ou sa molécule, en prenant pour unité celle de l'hydrogène, au lieu de 11,36.

Quant à la densité du gaz de carbone, ou sa molécule, en prenant pour unité celle de l'oxygène, je trouve d'après la même hypothèse 0,75392. Ainsi la molécule du carbone serait environ 12 fois aussi grande que celle de l'hydrogène, et les trois quarts de celle de l'oxygène.

D'après cette hypothèse sur la constitution de l'acide carbonique le gaz oxide de carbone, selon sa composition connue, doit être formé de volumes égaux de gaz de carbone, et de gaz oxygène, et en sorte que son volume soit égal à la somme des volumes de ses composans, ce qui offre encore la division ordinaire de la molécule composée, ou le redoublement de volume; ainsi notre hypothèse a en sa faveur cette analogie dans l'un et dans l'autre des deux composés de carbone, et d'oxygène.

J'ai vu, après la publication de mes mémoires, mon hypothèse pour la détermination de la molécule du carbone admise par M. Berzelius, qui en conséquence dans son dernier ouvrage assigne à cette molécule en prenant pour unité celle de l'oxygène le nombre 0,7533 fort-peu différent de celui que je viens d'indiquer. D'autres chimistes, et en particulier M. Gay-Lussac, supposent l'acide carbonique formé d'une molécule de carbone, et une d'oxygène, ce qui transporté à la théorie des volumes reviendrait à dire qu'un volume

de gaz de carbone y est joint à un volume égal au sien d'oxygène ; dans cette supposition la densité du gaz de carbone , ou sa molécule devient la moitié seulement de celle que nous venons d'indiquer , savoir 0,377 en prenant pour unité celle de l'oxygène. Mais de cette hypothèse il s'en suivrait que dans la formation de l'acide carbonique il n'y aurait pas division de molécule , ou redoublement de volume , ce qui est contraire à ce qui arrive le plus communément et même presque toujours ; cette analogie de la division aurait seulement lieu en ce cas dans le gaz oxide de carbone qui dans cette hypothèse serait composé d'un volume égal au sien de gaz de carbone , et d'un demi-volume d'oxygène. C'est là déjà , du moins dans le système que nous avons embrassé de déterminer les molécules par les volumes des gaz une preuve assez forte en faveur de notre hypothèse , préférablement à celle de M. Gay-Lussac, quoique elle ne soit pas décisive , puisque nous avons quelques exemples de combinaisons binaires sans redoublement de volume.

J'ajouterai encore que dans notre hypothèse l'acide carbonique serait analogue à l'acide nitreux , et le gaz oxide de carbone au gaz nitreux , ou deutoxide d'azote ; dans celle de Gay-Lussac appliquée aux volumes gazeux , l'acide carbonique serait analogue au gaz nitreux , ou deutoxide d'azote , et le gaz oxide de carbone au gaz protoxide d'azote. Or il me semble que les premières de ces analogies sont plus naturelles que les secondes , d'après les circonstances

dans lesquelles ces gaz se forment, car l'acide carbonique, et l'acide nitreux présentent l'un et l'autre le *maximum* d'oxigénation dont le carbone, et l'azote soient susceptibles sans l'intervention de l'eau, ou d'une base quant à l'azote.

Nous connaissons aussi deux composés de carbone, et d'hydrogène, le gaz oléfiant ou gaz hydrogène percarbure, et le gaz hydrogène carbure ordinaire (1). Le premier selon notre hypothèse sur le gaz de carbone doit contenir un volume de gaz de carbone uni à deux volumes de gaz hydrogène, sans redoublement, l'autre un volume de gaz de carbone et quatre d'hydrogène, avec redoublement de volume relativement au gaz de carbone. Le premier de ces composés nous fournit donc dans cette hypothèse le premier exemple bien avéré d'exception à la règle générale du redoublement de volume, ou partage de la molécule en deux dans les combinaisons binaires et on ne pourrait ramener ce composé à cette règle qu'en supposant la densité du gaz

---

(1) Je vois dans la notice des séances de la Société de Londres du mois de novembre 1819 ( Bibl. universelle avril 1820 ) que M. Brande dans un mémoire lu à cette Société *sur la composition des composés gazeux inflammables* etc. a essayé de montrer qu'on ne peut prouver l'existence d'aucun autre composé de carbone et d'hydrogène, que celui qu'on appelle *gaz oléfiant*, et que le gaz qu'on nomme d'ordinaire *hydrogène carbure* n'est qu'un mélange de gaz hydrogène et oléfiant. N'ayant pu encore me procurer la lecture de ce mémoire, je ne sais quels peuvent être les argumens sur lesquels l'auteur appuie cette assertion. En attendant j'ai dû suivre ici l'opinion généralement reçue par les chimistes sur l'existence, et la composition du gaz hydrogène carbure.

de carbone double de celle que nous avons adopté, l'acide carbonique formé d'un volume de gaz de carbone, et quatre d'oxygène, l'oxide de carbone d'un de gaz carbone, et deux d'oxygène, le gaz oléfiant d'un de carbone et quatre d'hydrogène, et le gaz hydrogène carburé d'un de carbone, et 8 d'hydrogène; et en outre que dans la formation de l'acide carbonique, de l'oxide de carbone, et du gaz hydrogène carburé ordinaire, il y a quadruplication de volume ou partage de la molécule en quatre, toutes supposition moins probables que celles auxquelles nous avons été conduit. D'un autre côté si l'on admettait l'hypothèse de M. Gay-Lussac le gaz oléfiant contiendrait un volume de gaz de carbone, et un de gaz hydrogène, mais il aurait un volume qui ne serait que la moitié de celui de chacun de ses deux composans, ce qui s'éloigne encore plus que le simple défaut de redoublement, de la règle qui nous est présentée par les substances que nous connaissons à l'état gazeux. Le gaz hydrogène carburé serait formé selon la même hypothèse d'un volume de gaz de carbone, et deux d'hydrogène, mais sans redoublement, en sorte que ce composé même ne rentrerait pas par là dans la règle générale. Ainsi tout concourt à prouver que notre hypothèse est au moins la plus probable, et celle qu'on doit admettre dans l'état actuel de nos connaissances.

M. Gay-Lussac nous a fait connaître, depuis la publication de mes mémoires, un composé gazeux de carbone, et d'azote, qu'il a nommé *gaz cyanogène* parce qu'il entre



dans la composition de l'acide du bleu de Prusse. D'après notre hypothèse sur la densité du gaz de carbone il est composé de volumes égaux de gaz de carbone, et de gaz azote, sans redoublement, ce qui présente un second exemple d'exception à la règle générale. Selon l'hypothèse de Gay-Lussac même il serait formé de deux volumes de gaz de carbone, et un d'azote, toujours sans redoublement, c'est-à-dire ayant lui-même un volume égal à celui du gaz azote, et c'est ainsi que M. Gay-Lussac le représente en effet. On voit que l'analogie du redoublement n'est pas plus favorable ici à l'une qu'à l'autre hypothèse, et les raisons que nous avons alléguées ci-dessus en faveur de celle que nous avons adoptée, restent dans leur force.

On ne connaît encore, que je sache, aucune combinaison binaire de carbone et de chlore; mais le carbone forme avec le chlore et l'oxygène, avec le chlore et l'azote, et avec l'hydrogène et l'azote des combinaisons ternaires qui sont le *gaz phosgène* de M. John Davy, et les *gaz acides chlorocyanique*, et *hydrocyanique* de M. Gay-Lussac, dont je crois devoir m'occuper ici par rapport à la théorie des volumes, ainsi que je l'ai annoncé dans la première partie. Car d'un côté ces composés sont intéressans sous ce rapport, étant peut-être les seuls composés ternaires non organiques qu'on ait observé jusqu'ici à l'état gazeux, et je ne crois pas convenable d'un autre côté de renvoyer ces composés au mémoire particulier dans lequel je m'occuperai des composés ternaires, et quaternaires d'oxygène organique.



Le gaz phosgène, ainsi que je l'ai déjà remarqué dans la première partie ne paraît guère pouvoir être considéré autrement que comme résultant de l'union d'un composé binaire, le gaz oxide de carbone avec le chlore, substance simple. Les volumes du gaz chlore, et du gaz de carbone qui le forment sont égaux, et le volume du gaz composé est égal à celui de chacun d'eux; ainsi cette combinaison secondaire se fait sans redoublement par rapport à ces deux composans immédiats: mais comme le redoublement avait déjà eu lieu dans la formation du gaz oxide de carbone, ce redoublement, lorsqu'on considère la combinaison par rapport à ses trois élémens primitifs, a encore lieu relativement à l'un ou à l'autre des deux gaz qui entrent en moindre proportion, savoir le carbone, et l'oxygène.

La vapeur d'acide hydrocyanique contient (selon notre hypothèse sur le gaz de carbone) un volume d'azote, un de carbone, et un d'hydrogène, et son volume est égal au double de chacun d'eux, en sorte que quelque ce soit de ces trois élémens qu'on veuille considérer comme base de la combinaison, la loi générale du redoublement de volume que nous avons observée dans les combinaisons binaires se réalise aussi dans ce composé ternaire. Si l'on veut, ainsi que M. Gay-Lussac l'a fait aussi, considérer spécialement cet acide comme formé de gaz cyanogène, et d'hydrogène, on observera que le volume d'azote, et le volume de carbone condensés en un seul formeraient un volume de gaz cyanogène, le redoublement n'ayant pas lieu,

comme on a vu dans ce composé; ce gaz venant à se joindre avec un volume égal au sien de gaz hydrogène formera un volume de vapeur d'acide hydrocyanique double de chacun de ces deux gaz, c'est-à-dire avec redoublement; ainsi le redoublement n'ayant pas eu lieu dans le composé binaire a lieu ensuite dans la combinaison du second ordre: c'est l'inverse de ce qui avait lieu pour le gaz phosgène. L'acide chlorocyanique offre une constitution tout-à-fait analogue à celle de l'acide hydrocyanique, et tout ce que nous venons de dire de ce dernier y est également applicable, en substituant seulement le chlore à l'hydrogène.

Ces faits sont trop peu nombreux pour établir une loi générale. On voit cependant que jusqu'ici la loi du redoublement de volume par rapport à celui de l'élément qu'on prend pour base de la combinaison, loi que nous avons admise pour les composés binaires, s'étend aussi à ces composés ternaires, en sorte cependant qu'un seul redoublement a lieu, et que par conséquent si le redoublement a eu lieu dans le premier composé binaire qu'on peut supposer y entrer, il n'a plus lieu dans l'union de ce composé binaire avec le 3.<sup>e</sup> élément, et au contraire.

5. Du soufre, et de ses combinaisons avec les substances précédentes. J'ai exposé dans mes mémoires les raisons d'analogie qui nous conduisent à penser que l'acide sulfureux qui contient un volume égal au sien de gaz oxygène contient la moitié de ce volume de gaz de soufre, c'est-à-dire qu'il est composé d'un volume de gaz de soufre et

deux d'oxygène , ce qui le rend analogue par sa composition à l'acide carbonique. Alors l'acide sulfurique doit être composé d'un volume de gaz de soufre , et trois volumes d'oxygène. Ce système a aussi été adopté par MM. Berzelius , Davy , et autres chimistes pour la composition des acides sulfureux et sulfurique en molécules. Néanmoins nos arguments d'analogie à cet égard sont un peu affaiblis par les composés d'azote et d'oxygène , qui comme nous avons déjà dit nous montrent qu'un radical qui prend pour former deux composés différens deux doses d'oxygène qui sont entr'elles comme 2 à 3, peut aussi bien être supposé en prendre 2 et 3 molécules pour une des siennes , ou bien 1 et  $1\frac{1}{2}$ , en sorte que l'acide sulfureux au lieu d'être analogue au gaz nitreux ou deutoxide d'azote pourrait l'être à l'acide nitreux , auquel cas l'acide sulfurique deviendrait analogue à l'acide pernitreux. C'est cette dernière analogie qu'a suivie M. Gay-Lussac dans plusieurs de ses mémoires, en considérant l'acide sulfureux comme formé d'une molécule de soufre , et une d'oxygène, et l'acide sulfurique comme formé d'une molécule de soufre et une et demie d'oxygène , ce qui l'a conduit à attribuer au soufre pour masse de sa molécule un nombre qui est seulement la moitié de celui que nous lui attribuons. Selon nous , d'après l'analyse de ces deux acides la molécule du soufre serait environ double de celle de l'oxygène , selon Gay-Lussac elle lui serait à-peu-près égale. Cependant l'analogie que nous avons suivie est d'abord la plus simple , et la plus naturelle,

lorsqu'on n'a point de preuves contraires. En outre l'acide sulfureux par ses propriétés se montre plutôt analogue à l'acide nitreux, qu'au gaz nitreux qui est dépourvu d'acidité; par la même raison il paraît aussi devoir être analogue à l'acide carbonique, ainsi que M. Gay-Lussac l'adopte lui-même; et alors les raisons que nous avons alléguées pour notre composition de l'acide carbonique entraînent aussi celle de l'acide sulfureux, et quelques unes s'y appliquent aussi immédiatement. Enfin l'évaluation même de la molécule du soufre à très-peu-près égale à celle de l'oxygène paraît peu probable, et notre hypothèse qui la donne double paraît assez justifiée par les propriétés physiques du soufre, qui semblent indiquer une molécule plus considérable que celle de l'oxygène. Il est vrai que dans cette hypothèse l'acide sulfurique n'aurait point d'analogue parmi les acides les plus connus; mais d'après ce qu'on a vu les découvertes les plus récentes tendent à ôter cette difficulté, en nous montrant dans l'acide nitrique oxygéné, etc. des acides qui présentent la même composition. D'un autre côté on a découvert aussi depuis l'époque de mon dernier mémoire deux autres acides du soufre, qui rendent la série de ses degrés d'oxygénation plus complète. Et d'abord d'après les travaux de M. Gay-Lussac et autres chimistes, on doit maintenant admettre un acide moins oxygéné que l'acide sulfureux, et qui serait formé, d'après notre système, d'un volume de gaz de soufre et un de gaz oxygène; c'est l'acide des sels que l'on avait nommé *sulfites sulfurés*. Gay-Lussac

lui avait d'abord donné le nom *d'acide persulfureux* ; il l'appelle à-présent, ainsi que M. Thomson, *acide hypo-sulfuré*. En outre MM. Gay-Lussac , et Welter ont découvert un acide intermédiaire entre l'acide sulfureux et l'acide sulfurique , et qui selon nous doit contenir  $2 \frac{1}{2}$  molécules d'oxygène pour une de soufre , et être par là analogue à l'acide nitrique. Cet acide , que M. Gay-Lussac nomme *acide hypo-sulfurique* doit être formé , selon les principes que nous avons adopté pour ramener ces composés fractionnaires à la théorie des multiples , d'une molécule de soufre à l'état d'acide sulfureux , avec une à l'état d'acide sulfurique. Dans la supposition de Gay-Lussac sur la composition des acides sulfureux , et sulfurique , cet acide devrait être formé d'une molécule et un quart d'oxygène sur une de soufre , ce qui n'a aucune analogie en sa faveur. Au reste M. Gay-Lussac paraît avoir adopté lui-même notre manière de voir dans ses derniers mémoires.

D'après cela la progression des composés de soufre et d'oxygène donnerait pour un volume de gaz de soufre , successivement 1, 2,  $2 \frac{1}{2}$ , et 3 volumes de gaz oxygène , et il ne manquerait pour compléter cette série de manière à la rendre entièrement analogue à celle que nous présentent les degrés d'oxygénation de l'azote , en y comprenant l'acide nitrique oxygéné de Thénard , que les composés analogues au gaz protoxide d'azote , et à l'acide pernitreux. Les expériences de Thénard nous présentent au reste encore d'autres degrés d'oxygénation du soufre , supérieurs à l'acide sulfurique , en état d'union avec l'eau , de même que pour



les autres acides ; mais je m'abstiendrai de m'en occuper particulièrement , par les raisons que j'ai déjà alléguées dans les articles précédens, en rappelant cette découverte de Thénard.

Quant à la détermination précise de la molécule du soufre , ou densité de son gaz , je m'étais fixé dans mon dernier mémoire à 30,542 en prenant pour unité celle de l'hydrogène , telle que je la supposais alors , d'après la densité du gaz hydrogène sulfuré déterminée par M. Gay-Lussac , ce qui aurait donné 2,026 en prenant pour unité la molécule du gaz oxygène , d'après la même évaluation de celle de l'hydrogène. Mais si on calcule d'après la nouvelle évaluation que j'ai adopté par rapport à ce dernier gaz , savoir 0,06885 en prenant pour unité la densité de l'air atmosphérique , on trouve , en suivant toujours la même hypothèse sur la composition du gaz hydrogène sulfuré , que je suivais alors , et que je rappellerai dans un moment , que la densité 1,1912 que Gay-Lussac a trouvé à ce gaz , en prenant pour unité celle de l'air donne 2,2447 pour celle du gaz de soufre dans la même unité , et par là 32,603 en prenant pour unité celle de l'hydrogène , et 2,0144 en prenant pour unité celle du gaz oxygène. La densité du gaz acide sulfureux , telle qu'elle avait été déterminée par M. Davy aurait donné 2,033 pour le gaz de soufre , en prenant pour unité le gaz oxygène , résultat tant soit peu plus fort. M. Berzelius ayant cherché de nouveau à déterminer depuis la pesée spécifique du gaz acide sulfureux , la trouva par plusieurs expériences 2,247 en prenant pour



unité celle de l'air atmosphérique, sans qu'il y eût de variation que dans le quatrième chiffre, ce qui donnerait pour le gaz de soufre, en prenant pour unité l'oxygène 2,067, valeur encore un peu plus grande; mais il croit lui-même ce résultat fautif d'après les analyses des différens composés où entre le soufre, et la valeur qu'il trouve par une moyenne entre différens résultats de calcul de ce dernier genre serait 2,008 (*Nouvelles recherches sur les proportions chimiques, dans les annales de chimie et de physique juin 1817*). Dans l'appendice à son *Essai d'un système chimique de minéralogie* (journal de physique février 1818, et suiv.), je trouve qu'il adopte en nombre rond 2,01, et dans son dernier ouvrage il se fixe à 2,0116, ou plus exactement 2,01165 d'après l'analyse des oxides d'argent comparée avec celle des sulfures du même métal, et d'après celle du sulfate de plomb. La molécule du soufre serait donc d'après cela encore un peu plus petite, et par là un peu plus rapprochée du double juste de la molécule de l'oxygène, que ne le donne la détermination de la densité du gaz hydrogène sulfuré par M. Gay-Lussac; mais la différence est fort-peu considérable, et on peut s'en tenir à cette dernière évaluation fondée sur un procédé plus direct (1).

---

(1) M. Thomson par ses expériences sur la densité du gaz acide sulfureux, dans lesquelles il a fait usage d'une considération qui simplifie beaucoup, en général ces sortes de déterminations a trouvé cette densité 2,222 en prenant pour unité celle de l'air, c'est-à-dire précisément double de celle du gaz

Nous ne connaissons jusqu'ici qu'une seule combinaison de soufre avec l'hydrogène, savoir le gaz *hydrogène sulfuré* dont je viens de parler, ou gaz *acide hydro-sulfurique* ; il doit être composé, selon nos hypothèses précédentes d'un volume de gaz de soufre avec deux volumes de gaz hydrogène, avec redoublement de volume par rapport au gaz de soufre, selon la règle ordinaire. Il est ainsi analogue au gaz oléfiant, si ce n'est que celui-ci n'offre point le redoublement (1).

---

oxygène d'après son évaluation de cette dernière, ( journal de physique avril 1820, extrait des *Annales of philosophy* ) et d'après cela il est facile de voir que la densité du gaz de soufre selon nos suppositions devrait aussi être précisément double de celle du gaz oxygène, ou la molécule du soufre  $\equiv 2$ , en prenant pour unité celle de l'oxygène. Mais si en admettant le résultat de Thomson pour le gaz acide sulfureux, on s'en tient à la détermination de Biot, et Arago pour le gaz oxygène, je trouve que la densité du gaz de soufre deviendrait 2,2372 en prenant pour unité celle de l'air, et 2,0272 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, ce qui s'écarte un peu plus que le résultat tiré de la densité du gaz hydrogène sulfuré, de la détermination de Berzelius par les composés où entre le soufre.

(1) MM. Herschell et Gay-Lussac ont fait remarquer dernièrement ( *annal. de chimie et de physique* août 1820 ) que les *hydro-sulfures sulfurés* renferment un acide hydro-sulfurique particulier analogue à l'acide des sulfates sulfurés, c'est-à-dire à l'*acide hypo-sulfureux*, et cet acide est ce que M. Berthollet avait appelé *soufre hydrogéné*. Sa composition est à celle de l'acide hydro-sulfurique, ou gaz hydrogène sulfuré comme celle de l'acide hypo-sulfureux est à celle de l'acide sulfureux, c'est-à-dire qu'il contient des volumes égaux de gaz de soufre, et de gaz hydrogène ; mais ce nouveau composé d'hydrogène et de soufre ne paraît pas avoir été observé jusqu'ici hors de ses combinaisons avec les bases.

On ne connaît encore, que je sache aucune combinaison à doses fixes de soufre et d'azote, et je n'ai rien à ajouter à ce que j'ai dit dans mon dernier mémoire sur la combinaison du soufre avec le carbone; je rappellerai seulement que ce composé, d'après la densité de sa vapeur vérifie encore la règle ordinaire du redoublement de volume relativement au composant qui y entre en moindre proportion.

Quant à la combinaison du soufre avec le chlore je n'avais fait mention dans mon dernier mémoire que de la *liqueur sulfurée de Thomson*, et d'après les expériences de M. Davy, et d'Amédée Berthollet j'y avais admis une molécule de soufre et 2 de chlore. Mais d'après un mémoire que M. Thomson a publié dernièrement (*annals of philosophy*), et qui se trouve dans les *Annales de chimie et de physique* juillet 1820, il paraît que ce chimiste suppose que M. Davy en croyant composer la liqueur sulfureuse de Thomson, a formé un autre composé différent, et dans lequel la quantité de chlore relativement au soufre est double de celle qui entre dans cette liqueur de Thomson; car il dit qu'on n'était pas encore d'accord sur la composition de celle-ci, et en en faisant lui-même l'analyse il y trouve deux atomes de soufre, et un de chlore, ce qui d'après son évaluation de l'atome de chlore, double de la notre, ainsi qu'il est aisé de voir par la composition en poids qu'il en donne, répond selon notre évaluation à une molécule de chacun des deux composans; il ajoute

qu'outre cette combinaison de soufre et de chlore, il en existe une autre dans laquelle les deux élémens sont combinés atome à atome selon son évaluation, c'est-à-dire qui est formée selon la notre de 1 de soufre, et 2 de chlore; il dit qu'elle a été obtenue par M. Davy en mettant du soufre bien sec dans le chlore gazeux, ce qui est précisément le procédé qu'indique M. Davy pour la formation de ce qu'il appelle *liqueur de Thomson*. Si cela est il y aurait donc maintenant deux combinaisons connues de soufre avec le chlore, dans la première desquelles une molécule de soufre en prend une de chlore, et dans l'autre deux molécules. À la vérité M. Gay-Lussac dans le cahier cité des *Annales* remarque une cause d'inexactitude dans l'analyse que M. Thomson donne de sa liqueur, mais l'erreur qui en pourrait résulter tenderait à faire évaluer trop bas la quantité de soufre, ou ce qui revient au même à porter trop haut la quantité de chlore, en sorte qu'en la corrigeant on s'écarterait d'avantage de la composition du composé de Davy, au lieu de s'en rapprocher, et il est probable que cette erreur, peut être compensée par d'autres, n'a pu altérer le rapport en atomes que Thomson en a tiré.

6. Du phosphore et de ses combinaisons avec les substances précédentes. On a beaucoup travaillé depuis l'époque de mon dernier mémoire sur le phosphore, et sur ses combinaisons relativement à la théorie des proportions déterminées, et surtout sur celles qu'il forme avec l'oxygène,

et cependant on n'est pas encore d'accord , sur les points les plus essentiels. Les derniers résultats , qu'on peut seuls citer à-présent sur ce sujet , les recherches antérieures étant généralement reconnues pour fautives , conduisent à deux systèmes différens sur la série de ces composés , et par là sur l'évaluation de la molécule du phosphore , l'un fondé sur les expériences de MM. Dulong et Berzelius , l'autre sur les dernières expériences de Davy , et sur celles de M. Thomson. Je vais exposer ces deux systèmes , avec quelques nouveaux rapprochemens sur les résultats qui y conduisent , et nous tâcherons ensuite de nous décider pour celui des deux qui nous offrira plus de probabilité.

Selon les expériences de M. Dulong l'oxygène de l'acide phosphoreux est à celui de l'acide phosphorique comme 3 à 5 , et d'après cela il considère le premier comme composé de 2 atomes de phosphore , et 3 d'oxygène , et le second de 2 atomes de phosphore , et 5 d'oxygène. Cela rend la composition de ces deux acides , en considérant les atomes comme des volumes gazeux , analogue à celle de l'acide pernitreux , et de l'acide nitrique. Les expériences de M. Berzelius s'accordent entièrement à cet égard avec celles de M. Dulong. Ce dernier considère de plus l'acide formé par la combinaison lente de phosphore comme étant probablement une combinaison de ces deux acides qu'il propose d'appeler *acide phosphatique* , au lieu d'un simple mélange des mêmes acides que M. Davy y avait vu antérieurement ; l'oxygène dans cet acide serait selon M. Dulong à l'oxygène



dans l'acide phosphorique comme 9 à 10. Mais il serait difficile de ramener cette proportion à la théorie des multiples, et on doit regarder l'opinion particulière de M. Dulong à cet égard comme une simple conjecture, étrangère pour ainsi dire au système que nous exposons ici. Enfin M. Dulong admet encore un autre acide qu'il appelle *hypo-phosphoreux*, et dont l'oxygène serait à celui de l'acide phosphoreux comme 1 à 2, et par conséquent à celui de l'acide phosphorique comme 3 à 10; mais il suppose lui-même que c'est une combinaison ternaire où entre aussi l'hydrogène, en sorte qu'il n'y aurait de certain dans ce système que l'acide phosphoreux, et l'acide phosphorique. Quant aux proportions en poids, et à la masse de la molécule du phosphore qui en résulte, M. Dulong trouve que dans l'acide phosphorique 100 de phosphore prennent 124,8 d'oxygène, ce qui donne d'après la supposition indiquée sur la composition de cet acide 2,003 pour la molécule du phosphore en prenant celle de l'oxygène pour unité, c'est-à-dire que cette molécule serait à très-peu-près égale à celle du soufre (1). Par les expériences de Berzelius

---

(1) Cette égalité très-approchée entre les molécules de deux substances différentes pourrait être considérée comme peu probable : mais les deux substances dont il s'agit ici ont assez de ressemblance par les propriétés antérieures, pour que les autres propriétés par lesquelles elles se distinguent puissent être attribuées à d'autres caractères que la masse de la molécule, et en particulier à l'affinité pour l'oxygène qui paraît être beaucoup plus grande dans le phosphore que dans le soufre.



100 de phosphore prennent 128 environ, ou plus exactement, d'après ce qui est indiqué dans le dernier ouvrage de ce chimiste 127,45 d'oxygène pour former l'acide phosphorique, et en supposant que cet acide est formé d'une molécule de phosphore, et 5 d'oxygène, il en déduit 3,923 pour la molécule du phosphore en prenant pour unité celle de l'oxygène. En ramenant cette hypothèse à celle de M. Dulong qui a pour elle l'analogie de plusieurs autres acides, cela donne 1,9615 comme M. Berzelius le remarque lui-même; c'est toujours à très-peu-près le double de l'oxygène, comme par les expériences de M. Dulong. On peut donc réellement considérer, ainsi que je l'ai annoncé, les résultats de MM. Dulong et Berzelius, comme formant un seul système. M. Berzelius rattache d'ailleurs ce système à la composition des phosphates, et des phosphites, et c'est même l'analyse de ces sels qui l'a déterminé à reprendre celle des acides phosphoreux et phosphorique, par laquelle il a été conduit aux résultats indiqués.

Passons au système de MM. Davy et Thomson. M. Davy a trouvé par des expériences qu'il rapporte dans un mémoire, lu à la Société Royale de Londres le 9 avril 1818 que 100 de phosphore prennent pour se convertir en acide phosphorique 134,5 d'oxygène en poids, au lieu de 125 ou 128 qu'ont trouvé MM. Dulong et Berzelius. L'acide phosphoreux ne contient, selon lui, que la moitié de cette même quantité d'oxygène pour la même quantité de phosphore, savoir 67,25, ce qui s'écarte des résultats de Dulong

et Berzelius, soit par le rapport différent avec l'oxygène de l'acide phosphorique, qui est de 1 à 2 au lieu d'être de 3 à 5, soit par la quantité absolue d'oxygène, qui selon Dulong et Berzelius serait environ 75 ou 77 pour 100 de phosphore. M. Davy n'admet pas l'acide phosphatique de M. Dulong, mais il admet l'acide hypo-phosphoreux avec quelque modification dans les proportions : il y suppose 33 environ d'oxygène sur 100 de phosphore au lieu de 37 que Dulong lui en attribuait. Il résulte de ce système, selon Davy, qu'une molécule de phosphore en prend une d'oxygène pour former l'acide hypo-phosphoreux, 2 pour former l'acide phosphoreux, et 4 pour former l'acide phosphorique ; et d'après les proportions en poids la molécule du phosphore serait 45 en prenant celle de l'hydrogène ( ancienne évaluation ) pour unité ; par conséquent triple de celle de l'oxygène, au lieu d'être seulement à-peu-près double comme il résultait du système de Dulong et Berzelius.

M. Thomson ( annals of philos. trad. ann. de chimie et de phys. juillet 1816 ) parvient à un système semblable en partant de la composition du gaz hydrogène phosphoré. Ce gaz, selon lui, contient un volume égal au sien d'hydrogène ; sa pesée spécifique, telle qu'il a trouvée par expérience ( modifiée cependant un peu par des calculs *stéchiométriques*, ou de proportions déterminées que M. Thomson n'expose pas ) est 0,9022 en prenant pour unité celle de l'air. Ainsi en soustrayant la pesée spécifique 0,0694 de l'hydrogène ( car c'est la valeur qu'il lui suppose ) il reste

0,8328 pour le poids du phosphore sur 0,0694 d'hydrogène, ce qui revient à dire que 13 en poids de ce gaz sont composés de 1 d'hydrogène, et 12 de phosphore. Thomson le suppose composé d'un atome d'hydrogène, et d'un atome de phosphore, d'où il suit que son atome est 12 en prenant pour unité celui de l'hydrogène, et il serait par conséquent les trois quarts de celui de l'oxygène, selon la nouvelle évaluation du rapport entre l'oxygène et l'hydrogène; mais comme Thomson suppose aussi l'eau composée d'un atome d'hydrogène, et 1 d'oxygène, et prend par conséquent l'atome de l'oxygène pour la moitié seulement environ de ce que nous supposons, par rapport à l'hydrogène, il en déduit que l'atome de phosphore est 1,5 de celui de l'oxygène, comme cela suivrait aussi des expériences de Thomson dans notre hypothèse sur la constitution de l'eau, en supposant dans le gaz hydrogène phosphoré un atome de phosphore et 2 d'hydrogène, ainsi que l'exigerait la loi du redoublement dans les combinaisons gazeuses. Quant à la densité du gaz de phosphore (car M. Thomson est, comme nous avons déjà dit, un des chimistes qui distinguent la densité des gaz de la masse de leur molécule), il la suppose la moitié du poids de son atome relativement à celle du gaz oxygène, ce qui donne 0,75, ou les trois quarts de celle-ci. D'un autre côté par les quantités d'oxygène requises pour convertir le phosphore contenu dans le gaz hydrogène phosphoré en acide phosphoreux, et en acide phosphorique, il conclut que le gaz oxygène du premier est

à celui du second comme 1 à 2 conformément au système de Davy; car il observe que le gaz hydrogène phosphoré exige pour sa combustion un volume d'oxygène, et il se produit alors de l'acide phosphoreux, ou un volume et demi, et il se produit de l'acide phosphorique; or un volume d'hydrogène, contenu selon lui, dans ce gaz absorbant  $\frac{1}{2}$  volume d'oxygène pour former de l'eau, il en reste  $\frac{1}{2}$  pour l'acide phosphoreux, et 1 pour l'acide phosphorique. D'après cela il suppose que l'acide phosphoreux est composé d'un atome de phosphore, et un d'oxygène, et l'acide phosphorique de 1 de phosphore et 2 d'oxygène, ou en volumes le premier de 1 de phosphore et  $\frac{1}{2}$  d'oxygène, et le second de 1 de phosphore et 1 d'oxygène, proportions qui reviennent en poids à celles de M. Davy, d'après les valeurs que Thomson a données à l'atome, et au volume du phosphore. On voit donc que les systèmes de Davy, et de Thomson n'en forment réellement qu'un seul quant à la composition des deux acides en poids, et on n'a plus qu'à choisir dans ce système entre les trois hypothèses suivantes pour l'évaluation de la molécule, ou de la densité du gaz de phosphore, qui sont pour nous la même chose; savoir cette molécule ou densité en prenant pour unité celle de l'oxygène est ou 0,75 comme Thomson le suppose quant à la densité, ou 1,5 double de la précédente comme Thomson le suppose quant à l'atome, ou enfin 3, double encore de la précédente, ce qui est la supposition de M. Davy: mais si on admettait une foi ce

système la seconde de ces suppositions me paraîtrait la plus probable ; d'après elle l'acide phosphoreux serait composé d'une molécule de phosphore, et une d'oxygène, l'acide phosphorique d'une de phosphore, et 2 d'oxygène, et le gaz hydrogène phosphoré d'un de phosphore et 2 d'hydrogène. Il y aurait de plus, selon M. Thomson un autre gaz phosphoré où la quantité d'hydrogène est double que dans celui dont on vient de parler, et qui serait par conséquent composé dans cette hypothèse d'une molécule de phosphore et 4 d'hydrogène.

Voilà donc définitivement deux systèmes tout-à-fait différens soit pour la progression de l'oxigénation dans les deux acides, pour lesquels l'oxygène est représenté par 3 et 5 dans l'un, et par 1 et 2 dans l'autre, soit par la masse de la molécule qui est double à-peu-près de celle de l'oxygène dans l'un, et seulement  $1 \frac{1}{3}$  dans l'autre. Celui de Dulong et Berzelius paraît confirmé pour les analyses des phosphates, et des phosphites, que ce dernier chimiste a données ; celui de Davy et Thomson par celle de l'hydrogène phosphoré que Thomson y a ajouté. Mais en attendant de nouvelles expériences qui ôtent toutes les incertitudes, il me semble que le système de Berzelius et de Dulong se présente comme plus probable par les nombreuses analyses auxquelles il se lie ; d'ailleurs Berzelius a répondu d'une manière plausible aux reproches d'inexactitude que Davy a fait à ses expériences, et les expériences de M. Dulong paraissent aussi avoir été faites avec le plus grand



soin. Au contraire les expériences de Thomson sur le gaz hydrogène sulfuré sont sujettes à quelques difficultés, et d'abord l'assertion que le gaz hydrogène phosphoré contient un volume égal au sien de gaz hydrogène est contredite par les expériences de MM. Gay-Lussac et Thénard qui y ont trouvé 1 volume  $\frac{1}{2}$  d'hydrogène pour un de ce gaz ( recherches physico-chimiques ), et par celles plus récentes de M. Noutton la Billardière qui a trouvé que les deux gaz qu'il appelle *protophosphuré*, et *perphosphuré* contiennent chacun cette même proportion d'hydrogène, relativement à leur volume. Je trouve que si on suppose vraie cette proportion pour le gaz phosphoré ordinaire ou perphosphoré, les expériences de Thomson sur la combustion de ce gaz donneraient pour le rapport de l'oxygène entre l'acide phosphoreux, et l'acide phosphorique 1 à 3, ce qui s'éloigne trop des résultats directs pour être admis, et prouverait en conséquence que ces expériences sont aussi inexactes. Quant à la pesée spécifique du gaz hydrogène phosphoré, celle trouvée par Thomson ne peut assurément se concilier avec l'évaluation de la densité du gaz de phosphore selon le système de Berzelius et Dulong, en y supposant, comme cela est probable, la moitié de son volume de ce gaz de phosphore, puisque cette pesée spécifique 0,9022 est déjà moindre que la moitié de celle qu'aurait dans ce système le gaz de phosphore seul, en prenant pour unité celle de l'air, et qui serait environ 1,09, et qu'il faudrait encore y joindre le poids du gaz hydrogène.



Mais peut-être M. Thomson aura-t-il employé un gaz mêlé de gaz hydrogène protophosphoré, c'est-à-dire de cet autre gaz dont il parle lui-même, et probablement plus léger, et c'est ce que lui aura fait trouver une pesée spécifique trop petite. En partant de la densité du gaz de phosphore selon Berzelius, et supposant que dans le gaz hydrogène perphosphoré un volume de gaz de phosphore prend trois volumes de gaz hydrogène, avec redoublement de volume relativement au gaz de phosphore, ou ce qui revient au même qu'un volume de ce gaz contient un demi-volume de gaz de phosphore et un volume et demi de gaz hydrogène, comme cela est probable d'après ce qui précède, je trouve que sa densité devrait être environ 1,19 en prenant pour unité celle de l'air. La composition de ce gaz serait ainsi analogue à celle de l'ammoniaque. Quant au gaz protophosphoré, si on admet aussi pour le résultat de M. Noutton, qu'il contienne une fois et demie son volume de gaz hydrogène, on pourrait supposer qu'il ne contient qu'un quart de son volume de gaz de phosphore, et je trouve que sa densité serait alors environ 0,55 en prenant pour unité celle de l'air; mais il faudrait supposer alors quadruplication de volume relativement au gaz de phosphore, ce dont les combinaisons binaires multiples ne nous ont pas encore présenté aucun exemple: il faudra donc attendre des expériences directes sur la composition de ce gaz. Mais les réflexions que nous venons de faire suffisent pour montrer la supériorité des argumens, qui peuvent nous porter

à admettre le système de Berzelius et Dulong, sur la molécule, et les degrés d'oxygénation du phosphore, plutôt que celui de Davy et de Thomson, dans l'état actuel de nos connaissances.

Dans ce système l'acide phosphoreux, et phosphorique sont analogues pour la composition aux acides pernitreux, et nitrique, et peuvent par conséquent se réduire à la théorie des multiples de la même manière, savoir en les supposant formés de deux combinaisons multiples les plus voisines de celle fractionnaire qui répond à chacun d'eux, et qui sont jusqu'ici inconnues.

Le doute qu'il pourrait encore y avoir sur le choix entre les deux systèmes dont nous venons de parler, s'étend nécessairement aussi aux combinaisons du phosphore avec le chlore. Mais les expériences de M. Dulong semblent encore rattacher solidement ces combinaisons à son système, et réfuter avec avantage les résultats que M. Davy avait trouvés antérieurement à cet égard. En effet Dulong a trouvé par ces expériences que 100 de phosphore absorbent 327,6 en poids de chlore pour former le protochlorure de phosphore, ce qui s'éloigne peu du résultat que M. Davy avait trouvé 333, et que pour former le deutochlorure ils en absorbent 549,1 au lieu que les expériences de Davy donnaient 666. Les deux nombres 327,6, et 549,1 sont presque exactement comme 3 à 5, en sorte que les deux chlorures, quant au rapport entr'eux sont analogues aux acides phosphoreux et phosphoriques dans le système de MM. Berzelius et Dulong.

En supposant le résultat relatif au deutochlorure le plus exact, ainsi que Dulong le pense lui-même, auquel cas il faut porter la dose du protochlorure à 329,5, on trouvera que si l'on suppose que dans le protochlorure un volume de gaz de phosphore en absorbe 3 de chlore, et dans le deutochlorure par conséquent 5, doses respectivement doubles en volume de celles qui ont lieu pour l'oxygène dans les acides phosphoreux, et phosphorique, la densité du gaz de phosphore, d'après celle que nous avons attribuée au chlore se trouvera à très-peu-près égale à celle qui résulte de l'analyse de ces deux acides par M. Dulong. En effet la densité du gaz de chlore étant 2,25 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, son triple sera 6,75; on aura donc pour déterminer la densité du gaz de phosphore la proportion  $329,5 : 100 : 6,75 : x = 2,05$  environ, au lieu que l'analyse des acides a donné 2,003. C'est toujours à peu-près une densité double de celle de l'oxygène.

Au reste on voit que si dans ce système les deux chlorures de phosphore sont analogues aux deux acides de la même substance pour le rapport entre les doses d'oxygène, et de chlore, cette analogie ne s'étend pas au nombre absolu de molécules qui s'y joignent à une molécule de phosphore, puisqu'on a vu que le nombre de celles de chlore dans chaque chlorure doit être supposé double de celles d'oxygène dans l'acide correspondant. Cette dose double de chlore que d'oxygène, en volume, dans des combinaisons qui paraissent se répondre par les circonstances où

elles se forment , n'est pas particulière aux combinaisons de ces deux corps avec le chlore ; elle paraît être générale, et dépendante de la nature de ces corps : on l'observe par exemple aussi dans l'eau , et l'acide hydrochlorique où ces mêmes corps paraissent former des combinaisons correspondantes avec l'hydrogène, quoique celui-ci ne prenne que la moitié de son volume d'oxygène dans la première , et un volume égal au sien , de chlore , dans le second.

La même relation se trouve entre les chlorures à base métallique ou anciens *muriates* , et les oxydes des mêmes métaux , ainsi qu'il est facile de voir par les analyses de Davy , de Berzelius etc. Le soufre au contraire paraît en général présenter le même nombre de molécules que l'oxygène dans les combinaisons correspondantes avec les autres corps.

Les combinaisons du phosphore avec les autres substances dont nous avons parlé précédemment sont ou inconnues, ou moins importantes pour la théorie , en tant qu'elles ne se présentent pas sous forme gazeuse. C'est pour quoi nous ne nous y arrêterons pas.

7. Du *fluorium* , et de ses combinaisons. Dans mon dernier mémoire je tenais encore sur la composition de l'acide fluorique à l'ancienne hypothèse , qui supposait cet acide un corps oxygéné ; mais l'analogie nous porte maintenant à étendre à cet acide , ainsi que l'on fait la plupart de chimistes , la nouvelle théorie de la composition de l'acide muriatique , savoir à le supposer un corps hydrogéné , et

je vais discuter ici ce qui a été fait pour la détermination de sa composition, et de la molécule du *fluorium* sous ce point de vue.

Nous chercherons d'abord à déterminer la molécule, ou la densité du gaz de *fluorium* en partant des expériences de M. John Davy sur le gaz acide fluorique silicé, lequel selon la nouvelle théorie doit être composé de *fluorium* et de *silicium*. Selon les expériences de ce chimiste ce gaz a pour densité 3,5735 en prenant pour unité celle de l'air, et 100 parties de ce gaz en poids donnent 61,4 de silice lorsqu'on le décompose par une solution d'ammoniaque. Ces données nous fournissent le moyen de déterminer à la fois les proportions d'oxygène et de *silicium* dans la silice, et celles de *fluorium* et de *silicium* dans l'acide fluorique silicé. Nous supposerons pour cela que la silice est composée d'un volume de gaz de *silicium*, et deux volumes de gaz oxygène (d'après les raisons que j'ai alléguées dans mon second mémoire, et celles que j'opposerai encore ci-après à l'hypothèse différente que M. Berzelius a adopté à cet égard), et que le volume du gaz acide fluorique silicé est double de celui du gaz de *silicium* y contenu, selon l'analogie des autres combinaisons binaires. Ainsi un volume de gaz acide siliceo-fluorique qui pèse 3,5735 exigera pour la précipitation du *silicium* y contenu, en silice, un volume égal au sien d'oxygène, qui pèse 1,10359, d'où il suit par une proportion que 100 de gaz acide en exigent 30,8825 d'oxygène à joindre au *silicium*: soustrayant ce nombre de



61,4 reste 30,5175 pour la quantité de *silicium* contenu dans 61,4 de silice, et dans 100 d'acide siliceo-fluorique. Ainsi 61,4 de silice seront composés de 30,5175 de *silicium*, et 30,8825 d'oxygène, ce qui donne pour 100 de silice 49,703 de *silicium*, et 50,297 d'oxygène, ou à très-peu-près 49,7 de *silicium*, et 50,3 d'oxygène. C'est précisément le résultat auquel se fixe M. Berzelius sur la composition de la silice d'après les expériences directes, et l'analyse des différens composés où entre la silice, et qui n'ont aucune relation avec l'analyse du gaz acide siliceo-fluorique; accord qui est bien favorable à la justesse de nos suppositions sur la constitution de ce gaz, et de la silice en molécules. D'après cela on trouve que la densité du gaz de *silicium* serait 1,976 en prenant pour unité celle de l'oxygène. D'un autre côté 100 de gaz acide siliceo-fluorique seront composés de 30,5175 de *silicium*, et 69,4825 de *fluorium*. Il ne reste plus pour déterminer la densité du gaz de *fluorium*, ou la masse de sa molécule qu'à choisir entre les hypothèses qu'on peut faire sur le nombre relatif de molécules, ou de volumes gazeux de *fluorium*, et de *silicium* dans le gaz acide siliceo-fluorique. Or l'hypothèse qui me semble la plus probable à cet égard, est que pour former ce gaz acide un volume de gaz de *silicium* prend quatre volumes de gaz *fluorium*, et en l'admettant on trouve par la composition indiquée en poids, que la densité du gaz *fluorium* doit être 1,125 à très-peu-près en prenant pour unité celle du gaz oxygène, ou 18



à très-peu-près juste en prenant pour unité celle du gaz hydrogène , nouvelle évaluation. C'est à-peu-près la moitié de celle du chlore , en sorte que le chlore serait à cet égard au *fluorium* , ce que le soufre est à l'oxygène.

J'ai dit que cette supposition me paraissait la plus probable ; en effet d'après cette supposition sur l'acide siliceo-fluorique , on est obligé d'admettre pour la composition de l'acide hydro-fluorique , volumes égaux de gaz de *fluorium* , et de gaz hydrogène ; car dans la décomposition de l'eau lors de l'action de l'ammoniaque sur l'acide siliceo-fluorique un volume de *silicium* doit prendre deux volumes d'oxygène , qui en supposent quatre d'hydrogène à joindre aux quatre volumes de gaz *fluorium*. Or l'analogie de l'acide hydro-fluorique avec l'acide hydro-chlorique rend cette composition très-probable.

En outre l'évaluation de la molécule du *fluorium* , ou densité de son gaz , qui résulte de cette supposition s'accorde avec les analyses des fluures de *calcium* , de *potassium* etc. ( fluates de chaux , de potasse etc. dans l'ancienne théorie ) , que M. Humphry Davy nous a données , en supposant le double de molécules de *fluorium* que de molécules d'oxygène dans les oxides correspondaus , et on verra bientôt que l'analyse des fluates , telle que M. Berzelius l'a donné , conduit au même résultat , en le traduisant dans la théorie des fluures. Or cela a lieu de même pour le chlore ( comme nous l'avons remarqué dans l'article du

phosphore ), substance avec laquelle le *fluorium* a tant d'analogie. C'est donc un nouvel argument en faveur de notre supposition.

M. Humphry Davy par des calculs analogues à ceux que nous venons de faire , mais supposant l'acide fluorique composé d'une proportion de *fluorium* , et deux d'hydrogène, et l'acide siliceo-fluorique d'une proportion de *silicium* et deux de *fluorium* trouve pour la molécule de *fluorium* 33 en nombre rond en prenant pour unité celle de l'hydrogène, ancienne évaluation, ce qui revient à environ 35 d'après la nouvelle évaluation de la densité du gaz hydrogène : en remplaçant son hypothèse par la notre sur la constitution de ces deux gaz, par les raisons alléguées, cette molécule se réduit à la moitié 17,5, nombre très-peu différent de celui que nous venons de trouver. Il faut au reste remarquer que M. Davy suit dans son système à cet égard la même analogie du chlore que nous avons suivi; car il suppose comme nous la molécule du *fluorium* à-peu-près égale à la moitié de celle du chlore, qui selon lui est double de la densité de son gaz.

M. Berzelius suit encore, sur la nature de l'acide fluorique, comme pour l'acide muriatique, l'ancienne hypothèse d'un acide oxygéné; mais voyons ce que donnent ses déterminations, lorsqu'on le ramène à la nouvelle théorie que nous avons embrassé. M. Berzelius a trouvé par l'analyse du fluaté de chaux que 100 parties d'acide fluorique saturent

une quantité de base qui contient 72,7185 d'oxygène (1), d'où il suit selon lui que cet acide contient sur 100 parties 27,2815 de radical fluorique, et 72,7185 d'oxygène. Il en conclut, en supposant dans cet acide une molécule de radical, et deux d'oxygène, que la molécule du radical fluorique est 0,7503 en prenant pour unité celle de l'oxygène. On voit qu'il suppose d'ailleurs que dans les fluates l'acide contient une quantité d'oxygène égale à celle de la base. Cela posé si nous supposons que la base contienne deux molécules d'oxygène pour une de radical, comme nous les supposons par la chaux, et comme le suppose aussi M. Berzelius, le fluaté de chaux selon Berzelius serait composé d'une molécule de *calcium*, une de radical fluorique, et quatre d'oxygène. Mais selon notre théorie ce que Berzelius considère dans ce composé comme radical fluorique et oxygène n'est que du *fluorium*: la quantité de *fluorium* pour une molécule de *calcium* sera donc représentée, en prenant pour unité la molécule de l'oxygène par  $0,75 + 4$  ou 4,75, et, si on suppose que ce nombre exprime la valeur de quatre molécules de *fluorium*, la masse de cette

---

(1) Je rapporte ici ces nombres tels que les indique M. Berzelius dans son dernier ouvrage. Dans le mémoire qui se trouve dans les *Annales de chimie et de physique* mai 1819 on marque 72,7815 pour l'oxygène des bases saturées par 100 d'acide fluorique, et c'est peut-être par inadvertance qu'a eu lieu la transposition de chiffre par laquelle le nombre marqué dans l'ouvrage cité diffère de celui-là; mais la différence qui en peut résulter dans les calculs dont il s'agit ici est très-petite, comme on peut s'en assurer.

molécule sera  $\frac{4.75}{4}$  ou 1,1875 nombre fort-peu différent de celui que nous avons adopté 1,125, (1). Il suit donc de là que dans le fluure de *calcium*, qui répond au fluate de chaux de Berzelius, il y a, comme nous l'avons déjà annoncé ci-dessus, selon nos hypothèses, quatre molécules de *fluorium* pour une de *calcium*, au lieu que le *calcium* ne prend que deux molécules d'oxygène pour former la chaux. Seulement si l'on voulait accorder aux expériences de M. Berzelius sur le fluure ou fluate une entière confiance, il faudrait altérer un peu le nombre que nous avons admis, et adopter 1,1875 pour la molécule du *fluorium*, au lieu de 1,125, en rejetant la différence sur l'erreur des expériences de John Davy; mais peut-être préférera-t-on de s'en tenir au contraire au résultat que nous avons déduit de ces derniers, comme y conduisant d'une manière plus directe.

8. Du Bore, et de ses combinaisons. J'avais cherché à

(1) On arriverait au même résultat d'une autre manière en observant que d'après l'analyse du fluate de chaux de M. Berzelius ramenée à notre théorie, la même quantité de *calcium* qui prend 72,7185 d'oxygène pour former la chaux prend  $100 + 72,7185$ , ou 172,7185 de *fluorium* pour former le fluure. Si donc le nombre de molécules de *fluorium* et d'oxygène était le même dans ces deux composés, savoir 2 pour une de *calcium*, la molécule du *fluorium* serait  $\frac{172,7185}{72,7185}$  ou 2,375; mais si on suppose le double de molécules de *fluorium* que d'oxygène, savoir quatre pour une molécule de *calcium*, ce nombre se réduira à la moitié 1,1875.

déterminer dans mon dernier mémoire la molécule, ou la densité du gaz de cet élément en partant de ce que M. Gay-Lussac nous avait appris sur la composition en poids de l'acide borique, et de la pesanteur spécifique du gaz acide fluo-borique selon John Davy, en suivant l'ancienne hypothèse sur la nature de l'acide fluorique. Mais les expériences de M. Gay-Lussac étaient encore très-imparfaites, et il faut rectifier les calculs relatifs à l'acide fluo-borique, maintenant que nous considérons cet acide comme un simple composé binaire de *fluorinum*, et de bore. M. Berzelius assigne le nombre 0,69655 à la molécule du bore en prenant pour unité celle de l'oxygène. Cela est fondé sur ce que d'après ses expériences plus récentes, dont on peut voir le détail dans les *Annales de chimie et de physique* mai, et suiv. 1819 la quantité d'oxygène contenue dans une base qui sature 100 d'acide borique est 37,085, d'où il conclut que l'acide borique, qu'il suppose en contenir deux fois autant, est composé de 74,17 d'oxygène, et 25,83 de bore; ce qui donne le résultat indiqué par la molécule du bore en supposant cet acide formé d'une molécule de bore, et 2 d'oxygène, ainsi que le fait M. Berzelius.

Mais je ne trouve pas qu'une telle évaluation de la molécule du bore puisse se concilier avec la pesée spécifique 2,3709 (1) que M. John Davy a assigné par ses expériences

---

(1) C'est par un erreur de chiffre que j'avais indiqué au lieu de ce nombre, 2,435 pour la densité du gaz acide fluo-borique selon John Davy, dans mon second mémoire sur les masses des molécules.



au gaz acide fluo-borique, en prenant pour unité celle de l'air, et qui revient à 2,148 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, et en même tems avec quelque supposition probable sur la composition de ce gaz en molécules. Les hypothèses qui donneraient les résultats les plus approchans serait un volume de gaz de bore, et un de *fluorium*, sans redoublement, ce qui donnerait, d'après notre évaluation de la molécule du *fluorium* 1,821 pour la densité du gaz acide fluo-borique en prenant pour unité celle du gaz oxygène; ou bien un volume de gaz de bore, et trois de *fluorium*, avec redoublement de volume relativement au bore, ce qui donnerait 2,035 pour la densité du gaz acide, dans la même unité. Mais ces compositions supposées à l'acide fluo-borique n'auraient aucune analogie avec la composition supposée à l'acide borique même, d'après ce que nous savons par d'autres combinaisons, sur le rapport que le *fluorium*, et l'oxygène affectent entr'eux dans les composés correspondans. Nous avons vu en effet qu'il est probable que dans ces composés le nombre de molécules de *fluorium*, est en général double de celui des molécules de l'oxygène, de même que cela a lieu pour le chlore. En supposant donc les expériences de M. Berzelius sur les borates à-peu-près exactes, il faut faire quelque autre supposition sur le nombre de molécules d'oxygène dans l'acide relativement à celui de l'oxygène des bases, et relativement au radical même de l'acide, d'où résulte une évaluation différente de celle de M. Berzelius pour la



molécule du bore, et qui satisfasse à cette condition, et en même tems à la densité observée du gaz fluo-borique. Or je trouve qu'on y parvient d'une manière assez approchée en supposant que la quantité d'oxygène de l'acide dans les borates est  $\frac{3}{2}$  ou  $1\frac{1}{2}$  celui de la base, et qu'en même tems l'acide borique est aussi formé d'une molécule et demie d'oxygène sur une de bore, ce qui aura lieu relativement aux bases qui contiennent deux molécules d'oxygène pour une de radical, lorsqu'il y aura 2 molécules de bore ou radical de l'acide pour une de radical de la base. En effet dans ces suppositions les 37,085 d'oxygène de la base, trouvé par M. Berzelius en supposeraient  $\frac{3}{2}$ . 37,085, ou 55,6275 dans 100 d'acide borique; c'est-à-dire que celui-ci serait composé de 55,6275 d'oxygène, et 44,3725 de bore, et la molécule de l'oxygène serait à celle du bore comme  $\frac{2}{3}$ . 55,6275, ou 37,085 à 44,3725 ou comme 1 à 1,1965, c'est-à-dire que ce dernier nombre exprimerait la masse de la molécule, ou la densité du gaz de bore en prenant pour unité celle de l'oxygène. Maintenant l'acide fluo-borique devrait être composé, selon l'analogie indiquée de 3 molécules de *fluorium* pour une de bore, en supposant le redoublement de volume ordinaire dans la formation du gaz, on aurait donc pour la densité du gaz acide fluo-borique, en prenant pour unité celle de l'oxygène  $\frac{1,1965 + 3 \times 125}{2}$  = 2,286, nombre assez approchant de la densité 2,148 trouvée par expérience, pour que la différence puisse être attribuée aux erreurs des analyses de M. Berzelius, et de

la détermination de M. John Davy. Si conformément au système que nous avons suivi jusqu'ici, on préfère la détermination fondée sur la densité du gaz aux résultats tirés des proportions en poids, et qu'en conséquence on regarde les expériences de John Davy comme exactes, on trouve en suivant les mêmes hypothèses que ci-dessus 0,921 pour la densité du gaz de bore, au lieu de 1,1965, en prenant pour unité celle du gaz oxygène, et pour que l'analyse des borates s'accorde exactement avec cette évaluation, il faut supposer que la quantité d'oxygène contenue dans une base qui est saturée par 100 d'acide borique est 41,322 au lieu de 37,085 que M. Berzelius a trouvé par ses expériences. D'après cela l'acide borique serait composé en poids de 61,98 d'oxygène, et 38,02 de bore, au lieu de 55,63 du premier, et 44,37 du second qui donnaient les expériences de M. Berzelius dans les mêmes hypothèses.

La densité ainsi établie du gaz de bore 0,921 en prenant pour unité l'oxygène donne 14,7 en prenant pour unité celle de l'hydrogène nouvelle évaluation. Elle est comme on voit voisine de celle du gaz de carbone, substance avec laquelle le bore paraît en effet avoir de l'analogie, mais un peu plus grande, et par là plus voisine de celle de l'oxygène. L'acide borique, d'après la composition que nous lui avons supposé serait d'ailleurs analogue à l'acide phosphoreux, avec lequel il a cela de commun, de se former pour une combustion lente du radical. On dirait que le bore est au carbone, ce que le phosphore est au soufre.

9. Du *Potassium*, et de ses combinaisons. La détermination de la molécule de cette substance dépend de la supposition qu'on fait sur la composition de la potasse en nombre de molécules. J'ai allégué dans mon dernier mémoire les raisons qui me portaient à croire que la potasse était formée d'une molécule seulement d'oxygène sur une de *potassium*, tandis que la soude, et autres alcalis et terres alcalines contiendraient en général deux molécules d'oxygène pour une de radical. Ces raisons qu'il me sera permis de rappeler se réduisent sur tout aux deux observations suivantes: 1.° Le *potassium* et le *sodium* ont tant de propriétés communes, qu'on est porté à croire qu'ils diffèrent peu entr'eux pour la masse de la molécule. Or si on admettait la même composition en molécules pour ces deux alcalis, la quantité d'oxygène étant beaucoup plus grande dans la soude que dans la potasse, il s'en suivrait, que la molécule du *sodium* serait beaucoup plus petite que celle du *potassium*, tandis qu'on a plutôt quelques raisons de croire qu'elle est un peu plus grande. 2.° Le deutoxide de *sodium* ne contient qu'une fois et demie l'oxygène de la soude, tandis que le deutoxide de *potassium* en contient trois fois autant que la potasse, de sorte qu'en considérant les deux deutoxides comme analogues, le *potassium* doit prendre une molécule seulement d'oxygène pour former la potasse, et le *sodium* doit en prendre deux pour former la soude.

M. Humphry Davy a adopté la même distinction, entre la composition de ces deux alcalis comme on peut voir

dans ses *éléments de chimie*, et sans doute par ces mêmes considérations. Mais les autres chimistes n'y ont eu aucun égard; en général ils ont regardé la composition de la potasse, et de la soude comme analogues, et se sont seulement partagés sur le nombre de molécules d'oxygène à leur attribuer en commun, les uns ayant choisi 1 que nous attribuons M. Davy et moi à la potasse, et les autres 2 que nous avons attribués à la soude. Il en est résulté que je me suis trouvé d'accord avec les premiers, à des fractions près pour la molécule que j'ai attribuée du *potassium*, mais non pour le *sodium* et les autres métaux des alcalis, et avec les seconds pour la molécule que j'ai attribué au *sodium*, mais non pour le *potassium*. M. Berzelius est de ces derniers, en sorte que pour comparer son évaluation avec la mienne il faut ne prendre que la moitié de la masse qu'il attribue au *potassium*. Celle à laquelle il s'arrête dans son dernier ouvrage est 9,7983 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène; et elle est fondée sur son analyse du muriate de potasse, ou chlorure de *potassium*, d'après laquelle la potasse contient 16,9516 d'oxygène, et 83,0484 de *potassium*. Reduisant à la moitié on aura donc 4,89915 pour la molécule du *potassium* selon notre hypothèse, dans la même unité: ce qui répond à 78,4 environ en prenant pour unité la molécule du gaz hydrogène, nouvelle évaluation. Ce résultat diffère peu de celui que j'avais adopté d'après les expériences antérieures de M. Berzelius même.

10. Du *Sodium*, et de ses combinaisons. En adoptant

l'hypothèse d'une molécule de *sodium*, et deux d'oxygène dans la soude par les raisons que j'ai déjà alléguées. J'avais fixé à 90 la molécule du *sodium* en prenant pour unité celle de l'hydrogène, d'après les analyses de la soude qu'on avait lors de la publication de mes mémoires. M. Berzelius qui suit par rapport à la soude la même hypothèse que nous, la fixe, dans son dernier ouvrage, d'après l'analyse du muriate d'argent à 5,8184, ce qui, d'après notre nouvelle évaluation de la masse de l'hydrogène fait 93 environ en prenant cette dernière masse pour unité. Ceux qui n'admettent qu'une molécule d'oxygène pour une de radical dans tous les alcalis ne prennent qu'à-peu-près la moitié de ces nombres pour la molécule du *sodium*.

11. Du *Calcium*, et de ses combinaisons. D'après les analyses du muriate, et du carbonate de chaux par M. Berzelius, et en supposant la chaux formée comme la soude d'une molécule de *calcium*, et deux d'oxygène, ainsi que Berzelius l'admet aussi, j'avais adopté 77 pour la molécule, ou densité du gaz de *calcium* en prenant pour unité celle de l'hydrogène. M. Berzelius dans son dernier ouvrage la fixe à 5,1206, d'après sa dernière analyse du muriate de chaux, en prenant pour unité celle de l'oxygène; cela fait environ 82, en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, telle que nous l'avons adopté dernièrement. Ceux qui n'admettent qu'une molécule d'oxygène dans tous les alcalis et les terres doivent réduire ces nombres à la moitié, et obtenir ainsi pour le *calcium* une molécule beaucoup



plus petite que celle du *potassium*, ce qui ne paraît guère s'accorder avec les propriétés antérieures de la chaux, et de la potasse.

12. Du *Magnesium* ou *Magnium*, et de ses combinaisons. J'avais adopté, d'après les analyses de différens sels par M. Berzelius 47 pour la molécule du *magnesium* en prenant pour unité celle de l'hydrogène, et en supposant la magnésie composée comme la soude d'une molécule de radical et 2 d'oxygène. M. Berzelius qui suit la même hypothèse sur la composition de la magnésie, se fixe dans son dernier ouvrage, pour la molécule du *magnesium* à 3,1672 en prenant celle de l'oxygène pour unité, d'après l'analyse de sulfate de magnésie qu'il a donné dans son *Mémoire sur les composés qui dépendent d'affinités très-faibles*; ce qui ferait près de 51 en'admettant notre dernière évaluation de la molécule de l'hydrogène, et prenant celle-ci pour unité. Ceux qui n'admettent qu'une molécule d'oxygène pour une de radical dans la magnésie sont conduits à prendre seulement la moitié de ce nombre pour la molécule du *magnesium*, ce qui n'est nullement probable pour une substance dont l'oxide a une si grande cohésion. La molécule 51 paraît même encore trop petite, puisqu'elle n'est que les deux tiers de celles du *calcium*, et du *potassium*, et moins que les deux tiers par rapport à celle du *sodium*, et je trouve maintenant de la probabilité à croire que la magnésie contient le double de molécules d'oxygène que la soude, et la chaux, savoir, quatre pour



une de radical. Par là la molécule du *magnesium* deviendrait 6,3344 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène, et environ 101,3 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, savoir qu'elle serait un peu plus grande que celle du *sodium*, comme la molécule du *calcium* est un peu plus grande que celle du *potassium*. Ainsi la chaux aurait la même relation avec la potasse que la magnésie avec la soude, ce qui paraît s'accorder assez bien avec les propriétés extérieures de ces substances (1).

13. Du *Barium*, et de ses combinaisons. J'avais adopté 261 en nombre rond pour la densité du gaz de cette substance, en prenant pour unité le gaz hydrogène, ancienne évaluation. M. Berzelius l'évalue dans son ouvrage à 17,1386 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, ce qui donne

---

(1) Cet article était déjà rédigé lorsque j'ai eu connaissance des nouvelles expériences de M. Gay-Lussac sur l'analyse du sulfate de magnésie (Annales de chimie et de physique mars 1820) à la suite de celles de M. Long-Champ (même journal novembre 1819) d'après lesquelles on ne peut douter que celle de M. Berzelius ne fût un peu inexacte: d'après la nouvelle analyse qui s'accorde très-bien avec des expériences plus anciennes de M. Henry je trouve que la molécule du *magnesium*, en supposant 2 molécules d'oxygène dans la magnésie pour une de métal serait seulement 2,94258 en prenant pour unité celle de l'oxygène, au lieu de 3,1672, ce qui augmente encore la probabilité que cette molécule doit être doublée, en supposant dans la magnésie quatre molécules d'oxygène pour une de *magnesium*. Par là la molécule du *magnesium* deviendra 5,88516 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène ou 94 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation; ainsi elle sera toujours un peu plus grande que celle du *sodium*; mais la différence sera fort-petite.

274 environ en prenant pour unité celle du gaz hydrogène selon la nouvelle évaluation. Ces valeurs ont lieu en supposant, comme je l'avais fait, et comme M. Berzelius le fait aussi, que la baryte contient deux molécules d'oxygène pour une de *barium*. Ceux qui n'y en admettent qu'une doivent réduire la molécule du *barium* à la moitié; mais l'analogie avec la chaux me paraît rendre plus probable notre supposition; et la grosseur que nous attribuons à la molécule du *barium* ne doit pas paraître trop considérable, vu la grande pesée spécifique de la baryte.

14. Du *Strontium*, et de ses combinaisons. D'après l'analyse du carbonate de strontiane de Bérard j'avais admis 201 pour la densité du gaz de *strontium* en prenant pour unité celle de l'hydrogène, dans la supposition que la strontiane contienne deux molécules d'oxygène pour une de radical. M. Berzelius avait adopté d'abord, dans la même hypothèse une molécule un peu plus grande; mais dans son dernier ouvrage il la réduit, sans changer encore d'hypothèse à 10,946, d'après l'analyse du muriate de strontiane, ce qui fait environ 175 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. La molécule du *strontium* serait donc notablement plus petite que celle du *barium*, ce qui est assez annoncé par la différence de pesée spécifique des composés où entrent ces deux radicaux; et rien ne nous porte à admettre dans la strontiane une composition différente de celle de la baryte en molécules.

Ainsi des six oxides alcalins dont nous venons de parler,

quatre seraient à deux molécules d'oxygène, et des deux autres, l'un n'aurait qu'une seule molécule d'oxygène ( la potasse ), et l'autre en aurait quatre, ces exceptions étant suggérées par les différences très-considérables de la quantité d'oxygène en poids, pour des oxides dont les radicaux paraissent d'ailleurs avoir beaucoup d'analogie entr'eux.

15. Du *Silicium*, et de ses combinaisons. Nous avons déjà vu, en parlant du *fluorium*, que d'après les expériences de John Davy sur l'acide siliceo-fluorique, 100 de silice contiendraient 49,7 de *silicium*, et 50,3 d'oxygène, et que d'après cela la densité du gaz de *silicium*, en supposant dans la silice deux molécules d'oxygène pour une de *silicium*, comme nous l'avions fait dans le calcul même des expériences de John Davy serait 1,976 en prenant pour unité celle de l'oxygène. Cela revient à environ 31,6 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation. Ceux qui n'admettent dans la silice, comme dans les autres terres et alcalis qu'une seule molécule d'oxygène devraient réduire ce nombre à moitié. Mais M. Berzelius a adopté ici une autre composition, savoir trois molécules d'oxygène, sur une de *silicium*; alors la molécule du *silicium* doit être augmentée dans la proportion de 2 à 3, et portée ainsi à 2,9642, et c'est là en effet le nombre auquel se fixe M. Berzelius dans son dernier ouvrage, où il admet comme nous 50,3 d'oxygène dans 100 de silice. Ainsi il y aurait ici trois hypothèses différentes sur la composition de la silice en molécules, qui donneraient une

molécule à-peu-près égale à celle de l'oxygène, ou double, ou triple. La première hypothèse ne paraît avoir aucune probabilité vu la grande cohésion, et la densité considérable de la silice. La seconde que nous avons adoptée rend la molécule du *silicium* à-peu-près égale à celle du soufre, et la grande cohésion de la silice qui est alors analogue à l'acide sulfureux peut être attribuée dans cette hypothèse à la grande affinité du *silicium* pour l'oxygène qui par là forment avec lui une combinaison très-intime. La troisième hypothèse qui est celle de M. Berzelius pourrait paraître au premier aspect plus probable, en ne considérant que la composition de la silice en poids, parce qu'elle donnerait une molécule plus considérable au *silicium*, et M. Berzelius l'appuie encore par l'analogie qu'il trouve entre les *silicates* ou minéraux où entre la silice, et les sulfates, à l'acide desquels la silice serait alors analogue par sa composition. Mais si on admettait cette hypothèse, l'analyse de l'acide siliceo-fluorique par John Davy ne s'accorderait plus avec la composition de la silice en poids qui résulte des expériences directes, et qu'a adopté M. Berzelius même, tandis qu'elle s'y accorde très-précisément dans l'hypothèse de 2 molécules d'oxygène sur une de *silicium*, ainsi qu'on a vu à l'article de *fluorium*, où nous avons déduit cette composition en poids des expériences mêmes de John Davy dans cette hypothèse. En effet il faudrait alors admettre que le *silicium* contenu dans le gaz acide siliceo-fluorique, et que nous ne pouvons pas d'après l'analogie générale des

combinaisons binaires supposer d'un volume moindre que la moitié de celui du gaz acide, prit un volume de gaz oxygène égal à une fois et demi celui du gaz acide, ce qui donnerait 46,32 environ d'oxygène sur 61,4 de silice, c'est-à-dire plus que les  $\frac{3}{4}$  du poids de la silice, au lieu de la moitié environ de ce poids, que donnent les expériences directes. Il faudrait donc alors rejeter entièrement ces expériences de John Davy, qui s'accordent d'ailleurs aussi assez bien avec les analyses des fluures quant à la détermination de la molécule du *fluorium*, et regarder ces accords, dont l'un est si précis, comme purement accidentels, ce qui n'a aucune probabilité.

D'autre côté la petitesse de la molécule du *silicium* qui résulte de l'hypothèse que nous avons adoptée n'a rien de répugnant avec la grande cohésion de la silice, et par là probablement du *silicium*, après l'exemple du carbone, qui est très-fixe, quoique sa molécule soit beaucoup plus petite. Il est vrai que la combinaison du carbone avec l'oxygène devient gazeuse; mais si cela n'a pas lieu aussi pour le *silicium*, on peut l'attribuer, comme je l'ai déjà dit, à la grande affinité de ce radical pour l'oxygène, qui rend très-intime sa combinaison avec lui, et le *silicium* nous présente aussi d'ailleurs une combinaison gazeuse avec le *fluorium*.

Quant à l'analogie des silicates avec les sulfates, elle ne consiste réellement, qu'en ce que plusieurs des substances pierreuses que M. Berzelius désigne par ce nom, présentent



la silice avec trois fois autant d'oxygène que la base, ce qui a lieu en général dans les sulfates neutres, et n'a pas lieu ordinairement dans les sels dont l'acide est à 2 molécules d'oxygène. Mais j'observerai qu'il y a aussi, selon M. Berzelius même de silicates qui ne contiennent dans la silice que le double de l'oxygène de la base, et d'autres qui n'en contiennent qu'une quantité égale, comme on peut voir dans la table des combinaisons à la fin de l'ouvrage de M. Berzelius, ce qui n'a pas lieu en général dans les sulfates, et ne saurait avoir lieu pour des sels dont l'acide est à trois molécules d'oxygène, et la base à deux molécules, que dans le cas où il y aurait  $1 \frac{1}{2}$  molécules de radical de la base, pour une de radical de l'acide, dans la seconde de ces sels, et  $1 \frac{1}{3}$  molécules de radical de l'acide pour une de radical de la base, dans les premiers; et la progression indiquée nous porte naturellement à considérer les silicates à oxygène triple de celui de leur base comme une combinaison plus élevée, renfermant trois molécules de *silicium* pour une de radical de la base, et qui fait suite à celles où ce radical en prend une molécule, et deux molécules du radical de la silice, l'un et l'autre radical étant supposé uni pour chacune de ses molécules avec deux molécules d'oxygène. M. Berzelius dit que les silicates à oxygène triple de celui de la base paraissent être neutres comme les sulfates auxquels il les compare, ce qui ajouterait quelque chose à l'analogie dont il s'appuie; mais il observe lui-même qu'il est difficile de juger de l'état de



neutralité de ces sortes de combinaisons, et d'ailleurs la neutralité d'après les principes que j'ai exposés ailleurs n'est pas nécessairement liée avec une composition correspondante en molécules pour des substances différentes.

Je crois donc que l'hypothèse que j'ai suivie dans mon dernier mémoire est encore la plus probable dans l'état actuel de nos connaissances, savoir que la silice est composée d'une molécule de *silicium*, et deux d'oxygène, et que d'après cela en partant de l'analyse de la silice telle que M. Berzelius l'adopte, et qui résulte aussi des expériences de M. John Davy sur l'acide siliceo-fluorique, la molécule du *silicium* n'est que 1,9761 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ou à peu près double de celle-ci au lieu d'en être triple comme M. Berzelius le suppose.

D'après cela le soufre, le phosphore et le *silicium* auraient à-peu-près la même masse de molécule, en différant beaucoup d'ailleurs par leur degré d'oxigénicité, et par conséquent d'affinité pour l'oxygène.

16. De l'*Aluminium* et de ses combinaisons. J'avais fixé la molécule de cette substance à 34,28 en prenant pour unité la densité du gaz hydrogène, d'après l'analyse du sulfate d'alumine de M. Berzelius, et dans la supposition que cette terre contienne deux molécules d'oxygène pour une de radical. M. Berzelius ayant admis trois molécules d'oxygène dans la silice, est conduit par l'analogie à en faire autant pour l'alumine, et dans cette hypothèse il se fixe dans son dernier ouvrage pour la molécule d'*aluminium*

à 3,42833 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène, d'après son dernier résultat sur l'analyse du sulfate d'alumine. Mais n'ayant admis dans la silice que deux molécules d'oxygène, nous devons nous en tenir aussi à cette supposition pour l'alumine, et diminuer par conséquent du tiers la molécule adoptée par Berzelius pour le *silicium*, pour la réduire à cette hypothèse; par là cette molécule devient 2,28222 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui répond à 36,2 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation; résultat fort-peu différent de celui que j'avais déjà adopté. Ainsi la molécule de l'*aluminium* se trouve un peu plus considérable que celle du *silicium*, comme la pesée spécifique des deux terres, et des pierres où elles entrent en quantité considérable pouvait déjà le faire présumer. Ceux qui n'admettent qu'une molécule d'oxygène dans toutes les terres sont obligés de réduire la molécule de l'*aluminium* à la moitié de celle que nous venons de lui attribuer, ce qui ne paraît avoir aucune probabilité, vu la grande densité des pierres alumineuses.

17. Du Mercure, et de ses combinaisons. J'avais fixé dans mon dernier mémoire la molécule du mercure à 370 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, d'après l'analyse des chlorures de mercure de Fourcroy, en supposant que le protochlorure ou calomel est formé d'un volume de gaz de mercure, et deux de chlore, et le sublimé corrosif ou deutochlorure d'un de gaz de mercure, et quatre de chlore.

Mais j'avais déjà remarqué que les analyses des mêmes chlorures par M. Davy, dans les mêmes suppositions donnaient des nombres un peu plus grands, savoir 408 par le calomel, et 392 pour le sublimé corrosif. Depuis lors plusieurs chimistes se sont occupés de l'analyse exacte des chlorures, des oxides, et des sulfures de mercure, et on en pourrait tirer autant d'évaluation de la molécule du mercure, qui différeraient fort-peu entr'elles, et de celle que j'avais adopté. Je ne rapporterai que le dernier résultat de M. Berzelius. Il fixe dans l'ouvrage déjà cité plusieurs fois, la molécule du mercure à 25,316, en prenant pour unité celle de l'oxygène, d'après des expériences faites par M. Sefstroem dans son laboratoire, et qui n'ont pas encore été publiées, sur l'oxide rouge de mercure. Cela répond à 405 environ en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. On suppose dans cette évaluation qui s'accorde, comme on voit, assez bien avec celle que nous avons tiré des chlorures, une molécule d'oxygène dans le protoxide de mercure, qui fait la base de plusieurs sels, et deux molécules dans le deutoxide, ou oxide rouge, en sorte que dans chacun des deux chlorures il y a le double de molécules de chlore, que de molécules d'oxygène dans l'oxide correspondant, ce qui est conforme à l'observation générale que nous avons fait plus haut sur la relation qui existe entre le chlore et l'oxygène à cet égard. Quant aux raisons de croire que telle est en effet la composition des deux chlorures, et des deux oxides,

en molécules, je les ai alléguées dans mon dernier mémoire, et l'hypothèse indiquée me semble toujours la plus probable (1).

J'ajouterai seulement que le cinabre est analogue à l'oxide rouge de mercure; car il contient selon les mêmes hypothèses, d'après sa composition en poids deux molécules de soufre sur une de mercure.

---

(1) Les expériences de MM. Petit et Dulong par lesquelles ils ont trouvé que la chaleur spécifique de plusieurs substances, surtout métalliques multipliée par le poids de leur atome donne un produit constant, et dont j'ai dit un mot dans la première partie de ce mémoire tendraient à faire croire, que la molécule du mercure n'est que la moitié de celle que nous venons de lui attribuer, et que par conséquent les nombres de molécules de chlore, et d'oxygène dans les deux chlorures, et dans les deux oxides ne sont aussi que la moitié de ceux que nous y supposons respectivement. En effet la chaleur spécifique du mercure étant comme on sait à-peu-près 0,029 en prenant pour unité celle de l'eau, si l'on multiplie ce nombre pour 12,658 moitié de 25,316, on obtient 0,367 nombre à-peu-près égal aux autres que MM. Petit et Dulong ont trouvé d'une manière semblable pour les autres substances, et en particulier pour le soufre, en prenant pour la molécule du soufre 2,011 en parties de celle de l'oxygène, savoir à-peu-près celle que nous lui attribuons. Mais je présume que la règle n'a lieu approximativement que pour la plupart des métaux, pour lesquels en effet le rapport entre les molécules qui résulte de cette considération se trouve en général conforme à celui donné par les considérations chimiques, et que nous établirons dans les articles suivans, et cela peut être parce que la molécule de ces corps à l'état de gaz est la même qu'à l'état solide ou liquide, ou a le même rapport avec celle-ci. Et pour rétablir le rapport avec le soufre il suffit de supposer que le soufre à l'état solide double sa molécule relativement à celle qui aurait lieu à l'état de gaz conformément à l'acide que j'ai déjà supposé à cet égard en général à l'endroit cité. Il serait à désirer au reste qu'on déterminât directement la densité de la vapeur du mercure, et de celle du soufre, et du phosphore.

18. De l'Argent et de ses combinaisons. Selon les dernières expériences de Berzelius 100 parties d'argent prennent 7,3986 d'oxygène en poids pour former son oxide ; d'où M. Berzelius conclut que la molécule de ce métal est 27,0321 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène, dans la supposition que cet oxide contienne deux molécules d'oxygène pour une de métal. Mais par là la molécule de l'argent serait un peu plus considérable que celle que nous avons trouvé pour le mercure, lequel a cependant une densité notablement plus grande ; or cela paraît d'autant moins probable, que le mercure est moins oxygénique que l'argent, et que je crois observer qu'en général à molécules égales les substances les plus oxygéniques sont les plus denses (1). D'après cela je suis porté à croire, que dans l'oxide d'argent dont il s'agit il n'y a qu'une molécule d'oxygène pour une d'argent, ce qui est l'hypothèse que j'avais adopté dans mon dernier mémoire, et qu'en conséquence la molécule de l'argent doit être réduite à la moitié de la valeur que M. Berzelius lui assigne, savoir à

---

(1) Je dois rappeler ici que ce mot que j'ai proposé dans un *mémoire sur l'acidité et l'alcalinité* qui a été publié dans le *journal de physique* de Delaméthérie, signifie aptitude à jouer le rôle d'acide, ou comme s'exprime M. Berzelius, de *substance electro-négative* dans les combinaisons, en sorte qu'un corps est dit d'autant plus *oxygénique* qu'il joue ce rôle par rapport à un plus grand nombre d'autres corps, et d'autant *moins oxygénique* qu'il a au-dessus de soi à cet égard un plus grand nombre de corps, par rapport auxquels il joue le rôle de base, ou de substance electro-positive.



13,51605 en prenant pour unité la molécule de l'oxygène, ce qui répond à 216 en nombre rond, en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. Dans mon dernier mémoire je m'étais fixé à 206,36 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène alors admise, ce qui s'éloigne peu de ce nombre. Le chlorure d'argent se trouve être dans cette hypothèse formé d'une molécule d'argent, et deux de chlore, ce qui est encore conforme à l'observation générale rappelée à propos du mercure. M. Taraday croit avoir observé un oxide d'argent inférieur qui ne contient que la moitié de l'oxygène de l'oxide ordinaire; en ce cas cet oxide ne devra, dans notre hypothèse contenir qu'une demi-molécule d'oxygène pour une d'argent. (1).

19. De l'Or et de ses combinaisons. D'après des analyses des oxides d'or de M. Berzelius j'avais adopté 374 pour la molécule de ce métal en prenant pour unité celle de l'hydrogène. Dans son dernier ouvrage M. Berzelius la fixe

---

(1) Les expériences de Dulong et Petit sont ici favorables à notre évaluation de la molécule de l'argent, en la comparant avec celle que M. Berzelius attribue comme moi au mercure; car 13,51603 est le double à très-peu-près de 6,75 que ces auteurs ont du prendre pour la molécule de l'argent pour obtenir l'égalité du produit de la chaleur spécifique pour la molécule, avec ceux donnés par les autres métaux, de même que la molécule du mercure est aussi double de celle qui satisfait à cette égalité, comme on a vu dans la note précédente. Selon l'évaluation de M. Berzelius la molécule deviendrait pour l'argent quadruple de celle indiquée par la relation avec le soufre, et double de celle indiquée par la relation avec le mercure, par rapport auquel cette relation doit probablement se vérifier, s'agissant de deux métaux.



à 24,86 d'après les expériences de réduction de l'or par le mercure dans le muriate d'or ; cela fait 398 en prenant pour unité la nouvelle molécule de l'hydrogène, ce qui diffère assez peu du nombre indiqué. Ainsi la molécule de l'or serait un peu plus petite que celle du mercure, et sa densité plus grande doit être attribuée à son oxigénicité plus considérable, conformément à la remarque que j'ai fait à propos de l'argent (1). D'après la supposition sur laquelle est fondé notre calcul, et celui de M. Berzelius, l'oxide d'or qui fait la base des sels ordinaires d'or, et qui est brun-noirâtre, contient trois molécules d'oxigène pour une d'or ; il y en a un autre qui n'en contient qu'une, et on doit en supposer un intermédiaire qui en contient deux.

---

(1) D'après les expériences de M. Oberkampff sur les oxides d'or, dont je ne parlais pas ici parce que je regardais les derniers résultats de M. Berzelius comme plus exacts, la molécule de l'or, selon les mêmes hypothèses sur la composition de ces oxides en molécules, aurait été un peu plus considérable. Depuis la rédaction de cet article M. Pelletier a publié dans les *Annales de chimie et de physique* (septembre et octobre 1820) un mémoire sur les combinaisons de l'or, où il tire de la composition d'un *iodure d'or* qui doit être analogue au protoxide, une détermination de la molécule d'or, et par là de la composition en poids dans les oxides mêmes, qui approche beaucoup de celle de M. Oberkampff, et qui paraît mériter beaucoup de confiance. Selon cette détermination la molécule de l'or serait 29,93 au lieu de 24,86, et l'oxide ordinaire d'or qu'on suppose à trois molécules doit contenir 10,03 d'oxigène pour 100 de métal au lieu de 12,077 qu'a trouvé M. Berzelius. M. Oberkampff avait trouvé 10,01. La molécule indiquée d'après M. Pelletier revient à 479 en nombre rond en prenant pour unité celle de l'hydrogène, et elle serait la plus considérable de celles qui ont été déterminées jusqu'ici.

20 Du Platine et de ses combinaisons. Le platine a selon M. Berzelius deux degrés d'oxidation où les proportions de l'oxygène sont entr'elles comme 1 à 2 : il est naturel de supposer que le premier qui contient, selon les dernières expériences de M. Berzelius 8,2289 d'oxygène pour 100 de métal est analogue à l'oxide intermédiaire d'or, qui en contient 8,045, et que nous avons regardé avec M. Berzelius comme composé de deux molécules d'oxygène et une de métal. D'après cela la molécule du platine se trouve être 24,30452 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui donne 389 en nombre rond en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. M. Berzelius n'ayant aucun égard à l'analogie du platine avec l'or, suppose que le premier oxide du platine contient une seule molécule d'oxygène, et le second deux molécules, et adopte en conséquence pour la molécule du platine le nombre 12,15226, qui n'est que la moitié de celui que nous venons d'indiquer; par là la molécule du platine ne serait pas même la moitié de celle de l'or qui est notablement inférieur au platine en densité, ce qui n'a aucune probabilité. Dans notre hypothèse la molécule du platine serait encore un peu plus petite que celle de l'or, quoique sa densité soit plus grande; cela paraîtrait indiquer que le platine est plus oxigénique que l'or, selon la remarque que j'ai faite sur quelques uns des métaux précédens. M. Berzelius observe qu'Edmond Davy a cru trouver un nouveau degré d'oxidation du platine où il entre une fois et demie

autant d'oxygène que dans l'oxidule, et il dit que si cette observation se confirme, l'atome de platine pèse moitié moins, c'est-à-dire moitié de 12,1523; je crois qu'il a voulu dire que cela porterait à conclure que l'oxidule contient déjà deux molécules d'oxygène, en sorte que l'oxide d'Edmond Davy en contienne 3; mais alors il est clair qu'il faut au contraire doubler la molécule admise par M. Berzelius, en sorte que cette observation d'Edmond Davy est conforme à l'hypothèse que nous avons adoptée. Ce nouvel oxide répondrait ainsi à l'oxide ordinaire d'or, qui contient aussi trois molécules d'oxygène, tandis que le premier oxide de platine est analogue, comme nous l'avons dit à l'oxide intermédiaire d'or; le premier oxide d'or n'aurait point d'analogue parmi les oxides connus de platine, comme le dernier oxide de platine qui selon notre hypothèse contient quatre molécules d'oxygène, n'a point d'analogue parmi ceux de l'or (1).

21. Du Plomb, et de ses combinaisons. Dans mon dernier mémoire prenant pour base l'analyse de l'oxide jaune

---

(1) Encore ici la considération de la chaleur spécifique selon la remarque de MM. Dulong et Petit vient à l'appui de notre évaluation, et est contraire à celle de M. Berzelius, par comparaison avec les autres métaux, sur lesquels M. Berzelius est d'accord avec nous; en effet ces auteurs ont obtenu l'égalité approchée du produit du poids de l'atome par la chaleur spécifique en supposant la molécule du platine 11,91, nombre qui est à-peu-près la moitié de celui que nous admettons, de même que cela a lieu pour le mercure, et pour l'or.

par M. Berzelius, d'après laquelle 100 de plomb prenaient 7,7 d'oxygène, et supposant cet oxide composé de 2 molécules d'oxygène sur une de métal, comme la série des autres oxides établis par M. Berzelius porte à le croire, j'avais fixé à  $391 \frac{1}{2}$  la molécule du plomb en prenant pour unité celle de l'hydrogène. M. Berzelius étant revenu sur l'analyse de l'oxide du plomb dans ses nouvelles recherches sur les proportions chimiques ( annales de chimie et de physique juin 1817 ) trouva que la quantité d'oxygène dans cet oxide est un peu plus grande qu'il ne l'avait admis, et dans son dernier ouvrage, d'après une moyenne entre les résultats des analyses des différens sels de plomb, il fixe à 7,725 au lieu de 7,7 la quantité d'oxygène que prennent 100 de plomb. Il en conclut, en suivant toujours l'hypothèse indiquée pour la molécule du plomb 25,89 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui répond à 414 en nombre rond, en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation, et c'est là le résultat auquel on peut s'en tenir à-présent comme le plus approchant du vrai dans l'hypothèse indiquée sur la constitution de l'oxide jaune. Ainsi la molécule du plomb se trouve tant soit-peu plus grande que celle du mercure, et si la pesée spécifique du mercure est plus grande que celle du plomb, il faut l'attribuer à sa plus grande oxigénicité, selon la remarque que j'ai déjà fait plusieurs fois.

On peut remarquer ici que le sulfure de plomb d'après sa composition en poids est analogue à l'oxide jaune,

c'est-à-dire contient deux molécules de soufre sur une de plomb.

22. Du Fer et de ses combinaisons. En supposant que l'oxide du fer au *minimum* contienne deux molécules d'oxygène, et celui au *maximum* trois molécules, et en partant de l'analyse du premier par M. Gay-Lussac, d'après laquelle 100 de fer prendraient 28,3 d'oxygène pour la former, j'avais adopté pour la masse de la molécule du fer 106  $\frac{1}{2}$  en prenant pour unité celle de l'hydrogène, ce qui ferait 7,066 en prenant pour unité celle de l'oxygène, d'après l'évaluation de la densité du gaz hydrogène que je suivais alors. M. Berzelius a aussi analysé à plusieurs reprises les oxides de fer, et dans son dernier ouvrage il admet que 100 de fer prennent 44,22 d'oxygène pour former l'oxide rouge, ce qui fait 29,48 pour l'oxide au *minimum*; et d'après cela il assigne 6,7843 à la molécule du fer en prenant pour unité celle de l'oxygène ce qui répond à 108,5 environ en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation; et on peut adopter ce résultat comme le plus exact dans l'état actuel de nos connaissances. Mais M. Gay-Lussac a prouvé en outre, que l'oxide de fer noir qu'on obtient par la combustion du fer n'est pas celui au *minimum*, et qui fait la base des sels de fer, mais un oxide intermédiaire entre l'oxide au *minimum*, et l'oxide au *maximum*, et M. Berzelius admet maintenant aussi l'existence de cet oxide. J'avais déjà remarqué dans mon dernier mémoire, que la quantité d'oxygène que M. Gay-Lussac



y avait trouvé, répondait à  $\frac{1}{3}$  de plus d'oxygène que dans le protoxide, c'est-à-dire que selon notre supposition sur le protoxide, cet oxide intermédiaire contiendrait  $2\frac{2}{3}$  de molécules d'oxygène pour une de fer, et c'est aussi ce que M. Berzelius a confirmé par ses expériences. Mais comment concilier cette composition avec la simplicité des proportions définies? J'avais proposé à cet égard une hypothèse dans mon dernier mémoire qui consistait à considérer cet oxide comme une combinaison d'oxygène avec l'oxide au *minimum* déjà formé; mais M. Berzelius en a proposé une autre qui me paraît encore plus naturelle, et analogue à nos idées générales sur les combinaisons fractionnaires, expliquées dans la première partie de ce mémoire, savoir que ce soit une combinaison de l'oxide rouge avec l'oxide au *minimum* dans la proportion de deux molécules de fer au premier état avec une au second état; en effet on a alors la proportion de 3 molécules de fer et  $6 + 2$ , ou 8 molécules d'oxygène, et par là de 3 à 8 ou 1 à  $2\frac{2}{3}$ , de même que nous avons vu qu'une combinaison à demi volumes peut être expliquée par la réunion de deux composés à dose multiple, molécule à molécule.

En général soit  $m$  le nombre de molécules que prend une molécule d'un corps dans une de ses combinaisons multiples avec une autre, et  $m + 1$  le nombre qu'elle en prend dans la combinaison multiple immédiatement suivante avec ce même corps. Si l'on veut en former une combinaison qui contienne  $m + \frac{p}{q}$  molécules du second corps pour



une du premier, il faudra prendre  $q - p$  molécules d'un composé des mêmes élémens dans la proportion de 1 à  $m$ , et  $p$  molécules d'un composé dans la proportion de 1 à  $m + 1$ , et réunir ces deux composés en un seul. Car alors on aura pour le nombre de molécules du premier corps  $q - p + p$  ou  $q$ , et pour le nombre de molécules du second corps  $(q - p)m + 1)p$  qui se réduit à  $qm + p$ , et ainsi le rapport sera celui de  $q$  à  $qm + p$ , c'est-à-dire de 1 à  $m + \frac{p}{q}$  comme on le désire. Ce calcul donnerait un rapport non multiple entre les deux composés préexistans supposés, et par là ne remplirait plus le but de ramener les combinaisons fractionnaires à la théorie des combinaisons multiples, lorsque ni  $q - p$  ne serait un multiple de  $p$ , ni  $p$  de  $q - p$ , c'est-à-dire lorsque les numérateurs de la fraction  $\frac{p}{q}$ , et de sa fraction complémentaire à l'unité ne seraient pas multiples l'un de l'autre. Dans notre cas présent, relatif à l'oxide intermédiaire de fer nous avons  $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ , et la fraction complémentaire est  $\frac{1}{3}$ , le numérateur de la première de ces fractions étant multiple de celui de la seconde, la méthode est applicable. En effet, comme on a en outre  $m = 2$ , il faudra prendre  $q - p$  ou  $3 - 2$ , c'est-à-dire une molécule d'un composé d'une molécule de fer, et  $m$  ou 2 molécules d'oxygène; et  $p$  ou 2 molécules d'un composé d'une molécule de fer et  $m + 1$  ou 3 molécules d'oxygène, comme nous avons déjà indiqué.

Cette explication est ici d'autant plus admissible que

l'oxide dont il s'agit se sépare en effet par des moyens chimiques peu puissans en oxide au *minimum* ; et oxide rouge, comme MM. Gay-Lussac et Berzelius l'ont remarqué.

Cet oxide intermédiaire rend peu probable la supposition que l'oxide rouge puisse déjà être composé d'une molécule et demie d'oxigène sur une de fer, comme il faudrait le supposer dans l'hypothèse, que l'oxide au *minimum* n'en contienne qu'une seule, ainsi que le font quelques chimistes, et en particulier M. Thomson ; car alors la composition de l'oxide intermédiaire en deviendrait encore beaucoup plus compliquée.

M. Porret par son analyse des prussiates est conduit à penser que la molécule du fer doit être encore réduite à la moitié de celle que supposent les chimistes dont je viens de parler, c'est-à-dire au quart de la notre ( *Annales de chimie et de physique* novembre 1819 ). Mais ses arguments ne paraissent pas concluans, et ce qu'il dit, que par là la difficulté des oxides de fer fractionnaires disparaîtrait, paraît n'être que l'effet d'une inadvertance ; car au contraire dans l'hypothèse qu'il propose les oxides de fer deviendraient tous fractionnaires, et c'est en prenant une molécule double de celle que supposent Thomson, et autres chimistes, c'est-à-dire en la prenant telle que nous la supposons, que l'oxide au *maximum*, qui serait fractionnaire dans l'hypothèse de Thomson, devient un oxide à 3 molécules d'oxigène, ce qui rend aussi moins difficile l'explication de l'oxide intermédiaire.

On observera que l'hypothèse que nous avons adoptée pour la composition des oxides de fer règle par analogie celle de plusieurs autres oxides métalliques, et par là les évaluations de leurs molécules, telles que nous les admettons, et qui sont par conséquent en général doubles de celles qu'admettent les chimistes qui ne donnent qu'une seule molécule d'oxygène à l'oxide au *minimum* de fer.

Quant aux sulfures de fer j'ai déjà remarqué dans mon dernier mémoire qu'il y en a trois connus, lesquels d'après notre hypothèse sur les oxides doivent contenir pour une molécule de fer une, deux, et quatre molécules de soufre, en sorte que le second est analogue à l'oxide au *minimum*, et les deux autres n'ont point leurs analogues parmi les oxides.

23. Du Cuivre, et de ses combinaisons. J'avais assigné au cuivre la molécule 123 en prenant pour unité celle de l'hydrogène d'après les expériences de M. Gay-Lussac qui donnaient 12,28, et 24,57 d'oxygène pour 100 de métal dans ses deux oxides, et en supposant que le premier contienne une molécule, et le second deux molécules d'oxygène pour une de métal. M. Berzelius, en modifiant un peu, par les expériences qu'il regarde comme les plus exactes, la composition de ces oxides en poids, et suivant d'ailleurs la même hypothèse, adopte dans son dernier ouvrage 7,9139 pour la molécule du cuivre en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui répond à 127 en nombre entier, en prenant pour unité la nouvelle molécule de l'hydrogène.

On voit que la molécule du cuivre est ainsi un peu plus grande que celle du fer<sup>24</sup>, comme sa densité est aussi un peu plus grande; cette molécule paraîtrait même exiger une densité encore un peu plus considérable, vu l'oxigénicité assez grande du cuivre comparée à celle du fer; mais on ne pourrait réduire la molécule à la moitié de celle que nous avons adopté, sans s'écarter encore plus de l'analogie avec les autres métaux.

Le sulfure ordinaire de cuivre contient environ 25 de soufre sur 100 de cuivre, et est par conséquent analogue au premier oxide. Proust et Dobereiner ont fait connaître un second sulfure qui contient environ 50 de soufre sur 100 de métal, et est par conséquent analogue au deutoxide. Dobereiner admet de plus un 3.<sup>e</sup> sulfure qui contiendrait parties égales de soufre, et de cuivre, et qui serait formé selon nos hypothèses de 4 molécules de soufre pour une de métal; mais M. Gay-Lussac doute de son existence ( *Annales de chimie et de physique* avril 1818 ).

24. Du Manganèse, et de ses combinaisons. M. Berzelius admettait lors de la publication de mon dernier mémoire cinq oxides de ce métal; en faisant abstraction du premier, qu'il regardait lui-même comme douteux, les quatre autres offraient la progression 1, 2, 3, 4 d'oxigène. M. Gay-Lussac a encore jetté des doutes sur l'existence du premier de ces quatre oxides, et M. Berzelius n'en parle pas non plus dans son dernier ouvrage: mais la série 2, 3, 4 que présentent les trois autres suffit pour nous porter à admettre,

ainsi que je l'avais fait, que ces oxides renferment 2, 3, et 4 molécules d'oxygène pour une de métal. Selon M. Berzelius ces oxides contenaient 28, 42, et 56 d'oxygène pour 100 de métal, et d'après cela j'avais fixé la molécule du manganèse à 107,6 en prenant pour unité celle de l'hydrogène. M. Berzelius dans son dernier ouvrage adopte les résultats plus précis de M. Arfwedson 28,105; 42,16, et 56,21 d'oxygène pour 100 de métal dans ces trois oxides, et assigne en conséquence à la molécule de manganèse 7,11575 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui répond à 114 en prenant pour unité la nouvelle molécule de l'hydrogène. Ainsi la molécule du manganèse se trouve peu différente de celle du fer, dont il se rapproche par beaucoup de propriétés. Au reste les trois oxides dont nous venons de parler ne sont point analogues par leur composition, d'après ce que nous avons dit, aux trois oxides de fer; ce sont le premier et le second de ces oxides du manganèse qui sont analogues à ceux extrêmes du fer; mais dernièrement M. Arfwedson a trouvé un oxide de manganèse intermédiaire entre ces deux là, et tout-à-fait analogue à l'oxide intermédiaire du fer; il contient 37,47 d'oxygène pour 100 de métal, c'est-à-dire le tiers de plus que le premier oxide. Ainsi les oxides de fer ont tous leurs analogues dans les oxides du manganèse; mais celui-ci a un oxide de plus, ou contenant plus d'oxygène que tous ceux du fer, savoir quatre molécules.

J'ajouterai, sur les degrés d'oxidation du manganèse,



que d'après le travail de MM. Chevillot et Edwards sur le caméléon minéral, ce corps serait un composé d'oxide noir de manganèse, d'oxigène, et de potasse, dans lequel ces chimistes sont portés à regarder l'oxigène comme formant avec l'oxide noir une espèce d'*acide manganique*, que néanmoins ils n'ont pu obtenir jusqu'ici dans un état d'isolement. Ils promettent de faire voir que l'oxigène y est en proportion déterminé, et par une de leurs expériences qu'ils rapportent je trouve que cet acide devrait contenir 6 molécules d'oxigène pour une de métal; mais il faudra attendre des travaux ultérieurs, pour admettre ce résultat avec certitude.

25. Du Tungstène, et de ses combinaisons. Selon MM. Bucholz, et Berzelius l'acide Tungstique contient 20 ou plus exactement 19,9 d'oxigène pour 100, et l'oxigène de l'acide est à l'oxigène de l'oxide de Tungstène comme 3 à 2. D'après cela l'hypothèse qui se présenterait la première serait de supposer que l'acide Tungstique contient trois molécules d'oxigène, et l'oxide deux, pour une de métal, et c'est aussi l'hypothèse que suit M. Berzelius dans son dernier ouvrage, où il fixe la molécule du Tungstène à 12,07689 en prenant pour unité celle de l'oxigène, d'après la capacité de saturation de l'acide Tungstique, nombre peu différent de 12,4397 qu'on aurait, comme il le remarque en partant des expériences directes sur la composition de l'acide Tungstique. Mais dans ses mémoires, et ouvrages précédens M. Berzelius avait admis pour cette molécule une

valeur double, en supposant par conséquent 6 molécules d'oxygène dans l'acide Tungstique, et 4 dans l'oxide de Tungstique; et je crois cette hypothèse préférable. Dans cette hypothèse la molécule du Tungstène devient 24,15378 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ou 386 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation, en sorte que cette molécule serait peu différente de celle de l'or, de l'argent, du mercure, et du plomb. En effet on sait que le Tungstène métallique a une grande densité, et comme il paraît d'ailleurs peu oxygénique, cette grosseur de molécule n'a rien que de conforme aux analogies à cet égard (1). M. Berzelius observe que l'acide Tungstique, dans les sels qu'il forme, contient 6 fois, ou 3 fois l'oxygène de la base; dans notre hypothèse, et pour les bases qui contiennent deux molécules d'oxygène, les premiers de ces sels doivent être considérés comme formés par une molécule de base, et deux d'acide, et les seconds par une molécule de base, et une d'acide.

26. De l'Étain, et de ses combinaisons. Dans mon dernier

---

(1) On pourrait néanmoins embrasser l'hypothèse que suit M. Berzelius actuellement, et qui aurait pour elle l'analogie de l'acide Tungstique avec l'acide sulfurique, si on supposait, ainsi que je le propose ci-après pour l'arsenic, que ce n'est que dans l'état solide que la molécule du Tungstène se double par la réunion de deux molécules en une seule; mais on n'a pas les mêmes raisons particulières de croire à ce redoublement pour le Tungstène, que pour l'arsenic, et l'analogie avec les autres métaux reste ici dans sa force.

mémoire j'avais admis les trois oxides d'étain, alors établis par M. Berzelius, et dans lesquels les proportions de l'oxygène étaient 2, 3, et 4, et d'après cela j'avais supposé que le premier contient deux molécules, et le dernier 4 molécules d'oxygène pour une de métal, et d'après la quantité d'oxygène de ce dernier oxide 27,2 pour 100 de métal j'en avais conclu 221,6 pour la molécule de l'étain, en prenant pour unité celle de l'hydrogène. M. Gay-Lussac a rejeté depuis l'oxide intermédiaire de M. Berzelius, et celui-ci paraît y avoir renoncé lui-même puisqu'il n'en parle pas dans son dernier ouvrage; ainsi la progression des oxides n'indique plus si c'est 2 et 4, ou seulement 1, et 2 molécules d'oxygène qu'il faut admettre dans les deux oxides dont l'existence est constatée. Néanmoins je erois toujours l'hypothèse que j'avais adopté, la plus probable d'après les analogies avec les autres métaux; c'est aussi celle que suit M. Berzelius, et d'après elle, il assigne dans son dernier ouvrage 14,7059 à la molécule de l'étain en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui répond à 235 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation. C'est environ le double de celle du fer pour un métal qui a à-peu-près la densité de ce dernier; mais il faut remarquer que l'étain est beaucoup plus moins oxygénique que le fer, ce qui explique son peu de densité relativement à la grosseur de sa molécule, d'après la remarque que nous avons déjà eu plusieurs fois occasion de faire.

M. Berzelius admet trois sulfures d'étain où les proportions de soufre forment la progression 2, 3, et 4, et qui répondent par leur composition aux trois oxides d'étain que Berzelius admettait autres fois. M. Gay-Lussac n'admet que les deux sulfures entiers, analogues aux deux oxides dont l'existence est constatée.

27. Du Zinc, et de ses combinaisons. Selon les expériences de MM. Gay-Lussac et Berzelius il n'y a qu'un seul oxide connu de ce métal, dans lequel 100 de métal prennent 24,8 d'oxygène. Cet oxide paraît analogue à l'oxide majeur du cuivre, dont il diffère peu dans la proportion en poids. En y supposant, comme dans celui-ci deux molécules d'oxygène pour une de métal on trouve 8,0645 pour la molécule du zinc, en prenant pour unité celle de l'oxygène, et c'est là l'évaluation que M. Berzelius admet dans son dernier ouvrage. Cela répond à 129 en nombre rond, en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. Ainsi le zinc dans cette hypothèse diffère fort-peu du cuivre par la masse de sa molécule, et on peut attribuer sa densité un peu moindre à sa moindre oxigénicité, conformément à la remarque déjà faite plusieurs fois. Cependant il faut observer que cette différence de densité entre le cuivre, et le zinc est assez peu considérable, tandis que la différence en oxigénicité paraîtrait l'être beaucoup, si on en juge par leur rapport électrique dans les expériences de contact. En outre la masse de la molécule du zinc ainsi déterminée se trouve beaucoup plus petite

que celle que nous avons attribué à l'étain, qui a à-peu-près la même densité, et qui selon les mêmes expériences serait supérieur au zinc en oxigénicité, étant electro-négatif par rapport à lui. Ou pourrait donc être tenté de doubler cette molécule du zinc; mais cela obligerait de supposer qu'il y a dans l'oxide de zinc quatre molécules d'oxigène pour une de métal, ce qui ne paraît guère probable pour un oxide, au-dessous duquel on n'en connaît pas d'autre pour ce métal. Je crois donc qu'il faut s'en tenir à la première hypothèse dans l'état actuel de nos connaissances, et il me paraît probable d'après cela que l'intensité particulière de la qualité electro-positive; que le zinc présente dans les expériences de contact dépend de quelque circonstance particulière, et inconnue dans sa constitution, et ne nous nécessite pas d'admettre dans le zinc une aussi faible oxigénicité, qu'elle paraîtrait supposer, cette oxigénicité étant au contraire dans le zinc peut être supérieure à celle de l'étain, et à-peu-près égale à celle du fer, métal avec lequel le zinc paraît avoir beaucoup de rapport (1). Le sulfure de zinc est analogue par sa composition à son oxide.

---

(1) La considération tirée de la remarque de MM. Dulong et Petit ne serait pas non plus favorable à ce redoublement de la molécule du zinc; car la règle s'y vérifie, comme on peut voir dans leur tableau en attribuant au zinc la moitié de la masse de la molécule que nous lui avons attribué dans la première hypothèse, de même que cela a lieu pour tous les métaux précédens.



28. Du Molybdène, et de ses combinaisons. M. Berzelius admet trois oxides de molybdène, qu'il appelle *oxidum molybdicum*, *acidum molybdosum*, et *acidum molybdicum*, où les proportions d'oxygène forment la progression 1, 2, et 3, et qu'il suppose en conséquence contenir 1, 2, et 3 molécules d'oxygène pour une de métal, ce qui paraît assez probable. D'après cela, dans son dernier ouvrage il assigne au molybdène la molécule 5,968 en prenant pour unité celle de l'oxygène, en se fondant sur ce que l'acide molybdique est composé de 50,12 d'oxygène sur 100 de métal. Cela fait 95,5 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène, nouvelle évaluation. C'est un peu moins que la molécule du fer, comme la densité du molybdène paraît aussi moindre que celle du fer; et je n'aurais pas parlé ici de ce métal, dont je ne m'étais pas occupé dans mon dernier mémoire, et sur lequel je n'ai rien à ajouter aux idées de M. Berzelius, s'il n'était pas un de ceux qui sont décidément acidifiables, et qu'il est intéressant de comparer sous ce rapport aux substances non métalliques qui font l'objet des premiers numéros de cette partie de mon mémoire. D'après l'hypothèse indiquée l'acide molybdique est analogue par sa composition à l'acide sulfurique.

29. De l'antimoine, et de ses combinaisons. Dans mon dernier mémoire j'étais parti pour la détermination de la molécule de ce métal des expériences de M. Berzelius, sur les oxides d'antimoine, d'après lesquelles (abstraction faite

d'un premier oxide qui paraissait douteux , et auquel M. Berzelius paraît avoir lui-même renoncé aujourd'hui ) l'oxygène formait la série 2, 3, et 4, en sorte qu'il était naturel de supposer dans ces oxides 2, 3, et 4 molécules d'oxygène pour une molécule de métal; et comme le dernier contenait, selon ces expériences 27,2, et les deux autres 18,6, et 27,9 d'oxygène pour 100 de métal, j'en avais conclu que la molécule de l'antimoine était environ 162, en prenant pour unité celle de l'hydrogène, selon l'évaluation de cette dernière alors généralement admise par rapport à l'oxygène. Cela s'accordait aussi à très-peu-près avec l'analyse du sulfure d'antimoine par le même Berzelius, d'après laquelle il contenait 37,25 de soufre sur 100 d'antimoine; ce sulfure devait alors être composé de 2 molécules de soufre sur une de métal.

Depuis ce tems M. Thomson a donné ( annales de chimie février 1815 ) une nouvelle analyse de sulfure d'antimoine faite, à ce qui paraît, avec beaucoup de soin, d'après laquelle en calculant par la quantité de soufre qui se déposa, et d'acide sulfurique qui se forma lors de la dissolution du sulfure dans l'eau régale, il trouve qu'il était composé de 35,559 de soufre sur 100 de métal, ou de 73,77 de métal, et 26,23 de soufre sur 100 de sulfure; d'où il conclut, en supposant 2 molécules de soufre sur une de métal, que la molécule de l'antimoine est 11,249 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ce qui donne 169,57 en prenant pour unité celle de l'hydrogène, ancienne

évaluation, et est ainsi un peu plus considérable que celle qui résultait des expériences de M. Berzelius. M. Thomson remarque que l'oxide métallique qu'on obtint de 100 grains de sulfure, en précipitant la solution indiquée par l'eau et l'ammoniaque fut de 93,5, qui devaient contenir d'après l'analyse du sulfure 73,77 d'antimoine, d'où il suit que cet oxide devait contenir 26,745 d'oxygène pour 100 de métal, ce qui s'approche de 27,9 trouvé par M. Berzelius pour son second oxide ci-dessus, et s'accorde aussi à-peu-près avec l'évaluation de la molécule de l'antimoine tirée de l'analyse du sulfure, en supposant cet oxide formé de 3 molécules d'oxygène pour une de métal, évaluation qui donnerait 26,669 d'oxygène pour 100 de métal. Je remarquerai même à cet égard qu'on aurait pu déduire la composition du sulfure, et de l'oxide, et la détermination de l'atome de l'antimoine immédiatement de la quantité d'oxide obtenu, sans aucun égard au soufre recueilli, et arriver à un résultat peu différent de celui de M. Thomson, en suivant les hypothèses indiquées sur la composition du sulfure, et de l'oxide en molécules. Il suffit pour cela de combiner deux équations : car en appelant  $x$  la quantité d'antimoine contenue dans 100 de sulfure, et  $m$  la quantité d'oxygène que cette quantité d'antimoine prendrait, en s'y joignant molécule à molécule, et supposant la molécule du soufre précisément double de celle de l'oxygène, comme le faisait Thomson, le poids de deux atomes de soufre à joindre à  $x$  d'antimoine sera  $4m$ , et celui de 3

atomes d'oxygène sera  $3m$  ; ainsi on aura par l'expérience les deux équations

$$x + 4m = 100 ; \quad x + 3m = 93,5$$

En résolvant ces équations on trouve  $x = 74$  ,  $m = 6,5$  ; donc le sulfure est composé de 74 d'antimoine , et 4.6,5 , ou 26 de soufre sur 100 parties , et les 93,5 d'oxide sont composés de 74 d'antimoine , et 3.6,5 , ou 19,5 d'oxygène , ce qui répond à 26,351 d'oxygène pour 100 de métal ; et enfin on a pour l'atome d'antimoine , en prenant pour unité celui de l'oxygène  $\frac{74}{6,5} = 11,385$  , nombre peu différent de celui de Thomson.

Tout paraissait donc jusqu'ici conforme aux déterminations , et aux hypothèses de M. Berzelius , que j'avais suivi moi-même sur les trois oxides , à la petite altération près des doses absolues , et par là de la molécule de l'antimoine qui résulterait , comme on a vu , des expériences de M. Thomson. Mais vers le même tems M. Berzelius apporta lui-même une modification à ses idées sur les trois oxides dont j'ai parlé , d'après une nouvelle analyse du second , qu'il donna dans les *annals of philosophy* : au lieu de la progression 2, 3, et 4 dans les doses d'oxygène il adopta celle-ci 3, 4, 6 , en sorte qu'en retenant les analyses des deux oxides extrêmes , qui conservent entr'eux la même relation , la quantité d'oxygène contenue dans le second serait de 24,8 au lieu de 27,9. D'après cela M. Berzelius supposa que le premier oxide a déjà trois molécules d'oxygène , le second 4 , et le troisième 6 , et d'après les quantités absolues

d'oxygène dans ces trois oxides il adopta 16,13 ou plus exactement 16,129 pour la molécule de l'antimoine, en prenant pour unité le gaz oxygène, c'est-à-dire un nombre de la moitié plus grand que celui qui résultait de ses premières analyses et suppositions. Enfin dans son dernier ouvrage en retenant cette évaluation de la molécule de l'antimoine d'après l'analyse du premier oxide, et celle du second, dont je viens de parler, il établit d'après ses travaux postérieurs que le 3.<sup>e</sup> oxide contient une quantité d'oxygène qui est à celle du second comme 5 à 4 au lieu de 6 à 4, et en conséquence il lui attribue 5 molécules d'oxygène pour une de métal, les quantités d'oxygène dans les trois oxides pour 100 de métal sont d'après cela indiquées par les nombres 18,6, 24,8, et 31.

Il confirme ces rapports par les expériences sur la capacité de saturation des deux derniers oxides, considérés comme acides, sous le nom d'*acide antimonieux*, et d'*acide antimonique*, d'après lesquelles il établit que l'acide antimonieux contient 4 fois, et l'acide antimonique 5 fois autant d'oxygène que la base qui les neutralise. M. Thomson, qui avait déjà connaissance du changement d'idée de M. Berzelius sur la composition du second oxide d'antimoine lors de la publication de son mémoire sur le sulfure, paraît peu disposé à admettre la nouvelle composition de cet oxide, et en effet son analyse de sulfure n'est pas d'accord, comme on a vu, avec cette composition, puisqu'elle l'était à-peu-près avec la première.



Néanmoins l'exactitude connue que M. Berzelius apporte à ses expériences me porte à adopter son dernier résultat, sur ce second oxide, comme le plus probable, tant qu'on ne lui oppose aucune expérience postérieure aux siennes, d'autant plus que l'analyse de M. Thomson même indiquait déjà une quantité d'oxygène un peu moindre que celle qu'aurait exigé la relation d'abord supposée, avec le premier oxide.

Quant à la composition du premier oxide en molécules, et à la détermination de la molécule d'antimoine, on aurait pu encore concilier celle qui résultait des premières analyses de M. Berzelius, et que nous avons adopté, avec cette nouvelle composition du second oxide, si on adoptait la relation entre les trois oxides, telle que M. Berzelius l'avait établi dans les *annals of philosophy*, d'après laquelle l'oxygène du premier oxide était à celui du dernier comme 3 à 6, ou comme 2 à 4; car on aurait pu supposer, comme auparavant 2 molécules d'oxygène dans le premier, et 4 dans le dernier, et alors le second oxide aurait été au premier précisément ce que l'oxide intermédiaire du fer est au protoxide du même métal, et on aurait pu le concevoir de même comme formé de la combinaison de l'oxide à 2 molécules, ou du premier oxide avec un oxide à 3 molécules encore inconnu, et cela dans la proportion d'un à deux; mais le changement apporté depuis par M. Berzelius à la composition du 3.<sup>e</sup> oxide aussi, d'après lequel la quantité d'oxygène y est à celle du second

oxide comme 5 à 4 , et l'accord qu'il trouve dans la composition des antimoniates avec ce nouveau changement rend maintenant cette hypothèse peu probable , puisqu'il faudrait alors admettre  $3 \frac{1}{3}$  molécules d'oxygène pour une de métal dans cet oxide.

Je crois donc qu'il n'y a pas d'autre modification à apporter aux dernières idées de M. Berzelius , que de réduire à la moitié les nombres de molécules d'oxygène qu'il admet dans les trois oxides , savoir à  $1 \frac{1}{2}$ , 2 , et  $2 \frac{1}{2}$ , en sorte que le dernier oxide , ou l'*acide antimonique* devienne analogue à l'acide nitrique , et par conséquent d'adopter aussi pour la molécule de l'antimoine la moitié de celle à laquelle M. Berzelius s'est fixé , savoir 8,0645 , ce qui fait 129 en prenant pour unité la molécule de l'hydrogène , nouvelle évaluation. Cette évaluation rapproche ce métal des autres avec lesquels il a de l'analogie par ses propriétés , au lieu que la masse de molécule qui résulte de la nouvelle hypothèse de M. Berzelius sans cette modification , serait tout-à-fait improbable pour un métal assez léger , et qui ne paraît pas moins oxygénique , ou plus electro-positif que l'étain. Je crois donc que l'on peut s'y arrêter , comme étant la plus probable dans l'état actuel de nos connaissances.

Il faut remarquer que quelque hypothèse qu'on adopte sur la composition des oxides d'antimoine , le sulfure de ce métal reste toujours analogue au premier oxide , et que par conséquent dans celle que nous avons adopté il contient

une molécule et demie de soufre pour une molécule de métal.

30. De l'Arsenic, et de ses combinaisons. Dans mon dernier mémoire j'avais supposé, comme tous les chimistes le croyaient alors, que l'oxygène de l'oxide d'arsenic était à celui de l'acide arsenique comme 2 à 3, et d'après cela que le premier contenait deux molécules, et le second 3 molécules d'oxygène pour une de métal. En partant ensuite de l'analyse du sulfure d'arsenic par Laugier, 58 de métal et 42 de soufre, et supposant ce sulfure composé de deux molécules de soufre sur une de métal, j'avais obtenu 84 pour la molécule de l'arsenic en prenant pour unité l'hydrogène; d'après cela l'oxide d'arsenic devait contenir 35,7 d'oxygène sur 100 de métal, et l'acide arsenique 47,9, résultats assez conforme à ce que les expériences directes avaient appris. Ces évaluations s'accordaient aussi à très-peu-près avec les conclusions que M. Berzelius avait tiré des analyses de l'arsenite, et de l'arseniate de plomb, en supposant que l'oxide d'arsenic, ou acide arsenieux contient dans le premier trois fois autant d'oxygène que la base, et l'acide arsenique dans le second deux fois autant d'oxygène que la base. Cependant cette composition des arsenites et des arseniates ne présentant point la relation que M. Berzelius avait établie pour les acides qui contiennent le nombre de molécules supposé, pouvait déjà jeter quelque doute sur la composition des acides mêmes arsenieux, et arsenique. En effet M. Berzelius étant revenu depuis sur

ce sujet ( *annals of philosophy* T. 3 ) cru trouver ses premières analyses des arsenites , et des arseniates inexacts , et ayant fait d'un autre côté une nouvelle analyse aussi de l'acide arsenieux , il trouva que 100 parties d'arsenic y sont unies au moins avec 43,616 d'oxygène au lieu d'environ 35 ; ce résultat s'est trouvé à-peu-près d'accord avec sa nouvelle analyse de l'arsenite de plomb , en supposant que l'acide y contienne quatre fois l'oxygène de la base ; et avec la nouvelle analyse de l'arseniate en y supposant dans l'acide trois fois autant d'oxygène que dans la base , en retenant d'ailleurs toujours la relation de 2 à 3 entre l'oxygène de l'acide arsenieux , et celui de l'acide arsenique. Ainsi d'après ces résultats la composition des deux oxides ou acides en molécules aurait pu rester la même que nous avons admise ; l'évaluation seulement de la molécule de l'arsenic aurait été entièrement différente. Mais en outre M. Berzelius ayant cru trouver un autre oxide d'arsenic inférieur à l'oxide blanc , et dont l'oxygène serait à celui de ce dernier comme 3 à 4 , fut conduit à supposer que dans l'oxide blanc , ou acide arsenieux il y a déjà 4 molécules d'oxygène au lieu de 2 , et que par conséquent il y en a 6 dans l'acide arsenique ; et d'après ces suppositions il fixe alors la molécule de l'arsenic à 8,4 environ , en prenant pour unité celle de l'oxygène.

D'un autre côté M. Thomson ne croyant pas que ces nouveaux travaux de M. Berzelius pussent renverser les résultats établis par les autres chimistes , et par Berzelius même ,

d'après ses expériences antérieures, sur la quantité d'oxygène dans l'oxide d'arsenic, et dans l'acide arsenique, est revenu à l'analyse directe de ce dernier ( annales de chimie mars 1815 ) et a trouvé que 100 d'arsenic prennent 52,4 d'oxygène, résultat peu différent de ceux trouvés par les autres chimistes, et qui supposent toujours la relation de 3 à 2 entre l'oxygène de cet acide, et celui de l'oxide, et admettant en conséquence la même composition que ci-dessus de l'acide, et de l'oxide en molécules, nous ramène à-peu-près à notre première évaluation de la molécule de l'arsenic.

Mais M. Berzelius s'occupa lui-même de nouveau dernièrement de l'analyse directe des acides arsenieux et arsenique, et il fut conduit à des résultats différens de tous ceux qui précèdent, ainsi qu'il nous l'apprend dans ses *nouvelles expériences sur les proportions chimiques* ( annales de chimie et de physique juin 1817 ), et dans son dernier ouvrage. Ces résultats, tels qu'il les rapporte dans cet ouvrage sont les suivans. La proportion d'oxygène dans l'acide arsenique est de 53,178 parties d'oxygène pour 100 de métal, ce qui s'accorde à-peu-près avec le résultat de Thomson, et ceux des autres chimistes; mais la quantité d'oxygène dans l'acide arsenieux au lieu d'être à celle-là dans le rapport de 2 à 3 comme on l'avait supposé jusqu'ici, est dans le rapport de 3 à 5 ainsi que cela a lieu dans les acides phosphoreux et phosphorique, selon les derniers travaux de M. Berzelius qui sont, comme on a vu, d'accord avec ceux de M. Dulong; et ainsi 100 de métal en



prennent 31,907 d'oxygène pour former l'acide arsenieux, au lieu d'environ 33 que d'autres chimistes avaient trouvé dans cet acide. M. Berzelius a trouvé aussi que les capacités de saturation des acides arsenieux, et arsenique étaient d'accord avec cette relation de 3 à 5 dans leur oxygène. Enfin d'après ses expériences l'orpiment offre un degré de sulfuration de l'arsenic analogue au degré d'oxygénation de l'acide arsenieux, et dans le réalgar la dose de soufre est à celle qui se trouve dans l'orpiment comme 2 à 3. D'après ces résultats M. Berzelius suppose que dans l'acide arsenieux il y a 3 molécules, et dans l'acide arsenique 5 molécules d'oxygène pour une de métal, et il fixe en conséquence la molécule de l'arsenic à 9,4077 en prenant pour unité celle de l'oxygène. Mais en admettant ces résultats de M. Berzelius, comme étant le plus probablement conforme à l'état des choses, je pense que l'analogie avec l'acide nitrique, et autres, nous porte naturellement à n'admettre qu'une molécule et demie d'oxygène dans l'acide arsenieux ou oxide arsenic, et 2  $\frac{1}{2}$  molécules dans l'acide arsenique, comme nous l'avons fait pour les acides du phosphore, et en conséquence à réduire à la moitié la molécule de l'arsenic adoptée par M. Berzelius, ce qui donne pour cette molécule 4,70385 en prenant pour unité celle de l'oxygène, ou 75 environ en prenant pour unité celle de l'hydrogène, nouvelle évaluation. M. Berzelius même montre quelque doute sur le choix entre ce système, et celui qu'il embrasse; mais il se décide sur ce qu'on n'a, dit-il, aucun sujet de

croire qu'il existe une composition de deux atomes d'un élément avec cinq atomes d'un autre (car c'est à quoi revient la proportion de 1 à 2  $\frac{1}{2}$ ) ailleurs que dans les acides *anomaux* du phosphore, et de l'arsenic. Mais on a vu que l'acide nitrique, et l'acide chlorique nous offraient des exemples de cette composition, et comment ces sortes de composés pouvaient être ramenées à la théorie des combinaisons à doses multiples; ainsi les acides de phosphore et d'arsenic ne sont pas plus anomaux que ceux que je viens de citer, en y admettant une composition analogue. Il est vrai que d'un autre côté l'évaluation de la molécule de l'arsenic qui résulte de notre hypothèse peut paraître trop petite si on la compare avec celle des autres métaux qui ont à-peu-près la même densité, et le même degré d'oxigénicité, et une molécule double, telle que l'admet M. Berzelius, s'y accorderait mieux; mais cette considération qui se rapporte à l'arsenic dans l'état solide ne peut détruire la force des analogies qui fixent la molécule dont il s'agit, telle qu'elle serait probablement dans l'arsenic supposé gazeux, et il est possible qu'il se fasse une réunion de deux molécules en une dans le passage de l'état gazeux à l'état solide et liquide, selon l'idée que j'ai avancé à cet égard en général dans la première partie. Peut-être est ce qu'à cette petitesse de la molécule à l'état gazeux, et à la grosseur qu'elle acquiert par le redoublement dans l'état solide, qu'il faut attribuer ces qualités contigues, par lesquelles l'arsenic paraît tenir d'un côté aux substances

acidifiables non métalliques, et de l'autre aux substances métalliques, ainsi qu'on l'a remarqué depuis long-tems (1).

31. Résumé de cette 2.<sup>e</sup> partie. En prenant les différentes substances que nous avons examiné, par rapport à la masse de la molécule, on voit que les hypothèses auxquelles nous nous étions arrêtés dans les mémoires précédens sont encore pour la plupart, celle qui paraissent les plus probables dans l'état actuel de nos connaissances, et celles

---

(1) Les systèmes analogues que M. Berzelius a trouvé, comme on vient de voir pour le phosphore et l'arsenic, relativement à leurs degrés d'oxygénation se conforment mutuellement, vu l'analogie qui paraît avoir lieu entre ces deux substances; les observations de M. Mitscherlich, dont nous avons dit un mot en général dans la première partie sont encore en faveur de ce rapprochement; car elles prouvent que les formes cristallines des phosphates, et des arseniates sont, si non tout-à-fait identiques, comme il le prétend, du moins très-pu différentes, et assurément analogues. D'un autre côté ce genre d'observations serait aussi favorable à la manière de voir de M. Berzelius, qui sépare des deux acides phosphorique et arsenique des acides à 2  $\frac{1}{2}$  molécules d'oxygène, auxquels au contraire je les suppose analogues; car M. Mitscherlich remarque que les formes cristallines des nitrates, et des hypo-sulfates sont tout-à-fait différentes de celles des phosphates, et des arseniates; mais les divisions et réunions de molécules qui peuvent avoir lieu d'une manière différente soit dans la solidification de ces acides, soit dans la formation des sels, peuvent encore ici détruire une analogie qui probablement aurait lieu à l'état de gaz. Cette remarque pourra s'appliquer de même à d'autres cas où l'analogie des formes cristallines pourrait se trouver en opposition apparente avec les résultats suggérés par l'analogie des combinaisons, et elle restreint beaucoup l'usage qu'on pourrait essayer de faire de cette considération des formes cristallines pour se déterminer entre différentes hypothèses sur la composition des corps en molécules.

qu'admet aussi M. Berzelius en les traduisant s'il le faut, de sa théorie dans la notre, et avec quelque petite altération dans les valeurs numériques, d'après ses dernières expériences. Il faut en excepter quelques unes, pour lesquelles ces expériences ont fait varier entièrement le système des degrés d'oxidation qu'elles paraissaient présenter d'après les anciennes expériences moins exactes, et pour lesquelles j'ai cru devoir en général adopter aussi les nouvelles idées de M. Berzelius, en modifiant seulement quelque fois ses hypothèses de manière à obtenir la moitié ou le double de la molécule qu'il en déduit, et rendre par là la série de ces molécules plus conforme aux analogies que les différentes substances présentent entr'elles à cet égard. Ce n'est pas au reste ici le lieu de rassembler ces analogies, et de faire une classification des substances sur le rapport de la masse de leurs molécules; ce serait là l'objet d'un travail à part, dont je pourrai m'occuper un jour.

Quant aux combinaisons binaires de ces substances, que nous avons eu occasion de considérer, indépendamment des faits généraux qu'on connaissait déjà, elles nous présentent plusieurs résultats que je vais rappeler ici en peu de mots.

1.<sup>o</sup> Les combinaisons par moitiés de volumes ont lieu pour plusieurs corps gazeux, et par analogie aussi par moitié de molécules pour les autres, et nous avons vu comment on peut les ramener à la théorie des combinaisons multiples.

2.<sup>o</sup> Quelques substances paraissent se combiner soit par

volumes , ou molécules entières , soit par demi-volumes , ou demi-molécules , comme l'oxigène avec l'azote , tandis que d'autres paraissent affecter de se joindre par des volumes intermédiaires entre deux nombres entiers comme l'oxigène avec le chlore.

3.<sup>o</sup> Les combinaisons correspondantes , c'est-à-dire qui se forment dans des circonstances semblables , et par décomposition mutuelle entre différentes substances sont quelque fois formées des mêmes nombres de molécules , comme celles de l'oxigène et du soufre avec les autres corps , et quelquefois au contraire par un nombre de molécules double pour un corps , que pour un autre ; c'est par exemple , comme on a vu , la relation qui existe entre le chlore et l'oxigène dans leurs combinaisons avec les autres corps.

4.<sup>o</sup> Tout confirme jusqu'ici la loi générale , que le volume du composé gazeux dans les composés binaires à doses multiples est double du volume du composant qui n'y entre que pour un volume ; les exceptions à cet égard ne consistent , du moins d'après les hypothèses que nous avons adopté qu'en deux ou trois exemples , où ce redoublement de volume n'a pas lieu , et le volume reste égal à celui du composant qui n'entre que pour un volume dans la combinaison. Il n'y a pas d'exemple connu et bien constaté de quadruplication , ni d'autre relation plus compliquée ; les doutes de ce dernier genre que quelques composés paraissaient présenter à l'époque de mes mémoires ont disparu par des expériences plus exactes ( le gaz euechlorine ).



5.° Dans quelque exemple de combinaisons gazeuses à doses fractionnaires , et qu'on ramène à la théorie des combinaisons multiples par des combinaisons multiples préexistantes , le redoublement de volume n'a lieu probablement que par rapport à la formation de l'un des composés immédiats , et non par rapport à l'autre ( le deutocide de chlore ).

Enfin nous rappellerons ici que dans quelques combinaisons ternaires gazeuses dont nous avons parlé ( le gaz phosgène , et les gaz acides chloro-cyanique , et hydro-cyanique ), et qu'on peut considérer comme résultant de la réunion d'un composé binaire avec une substance simple , on observe que le redoublement a lieu dans la formation du composé ternaire , lorsqu'il n'a pas eu lieu dans celle du composé binaire , mais non dans le cas contraire ; en sorte qu'il n'y a toujours dans ce cas , du moins d'après le petit nombre d'exemples que nous en avons , que redoublement , et non quadruplication de volume dans le composé final relativement à celui des corps qu'on prend pour base de la combinaison.

# *Fautes à corriger dans le mémoire précédent.*

Pag. 15 l. 7 est double indifféremment, lisez est double de celui des gaz composans qui entre en moindre volume dans le composé, ou double indifféremment

32 11 de 4 à 1

de 3 à 1

45 16 1.<sup>ère</sup> Section des mās-  
ses etc.

supprimez ce titre

46 13 fractions

fonctions

48 13

et dans beaucoup d'autres endroits

pesée spécifique

pesanteur spécifique

54 21 a présenté

se présente

82 27 oxigène

origine

200 8 M. Noutton

M. Houtton

et ailleurs

128 dans la note lign. 23

à l'acide que

à l'idée que

130 9 M. Taraday

M. Faraday

137 7  $(q - p) m \equiv 1)p$

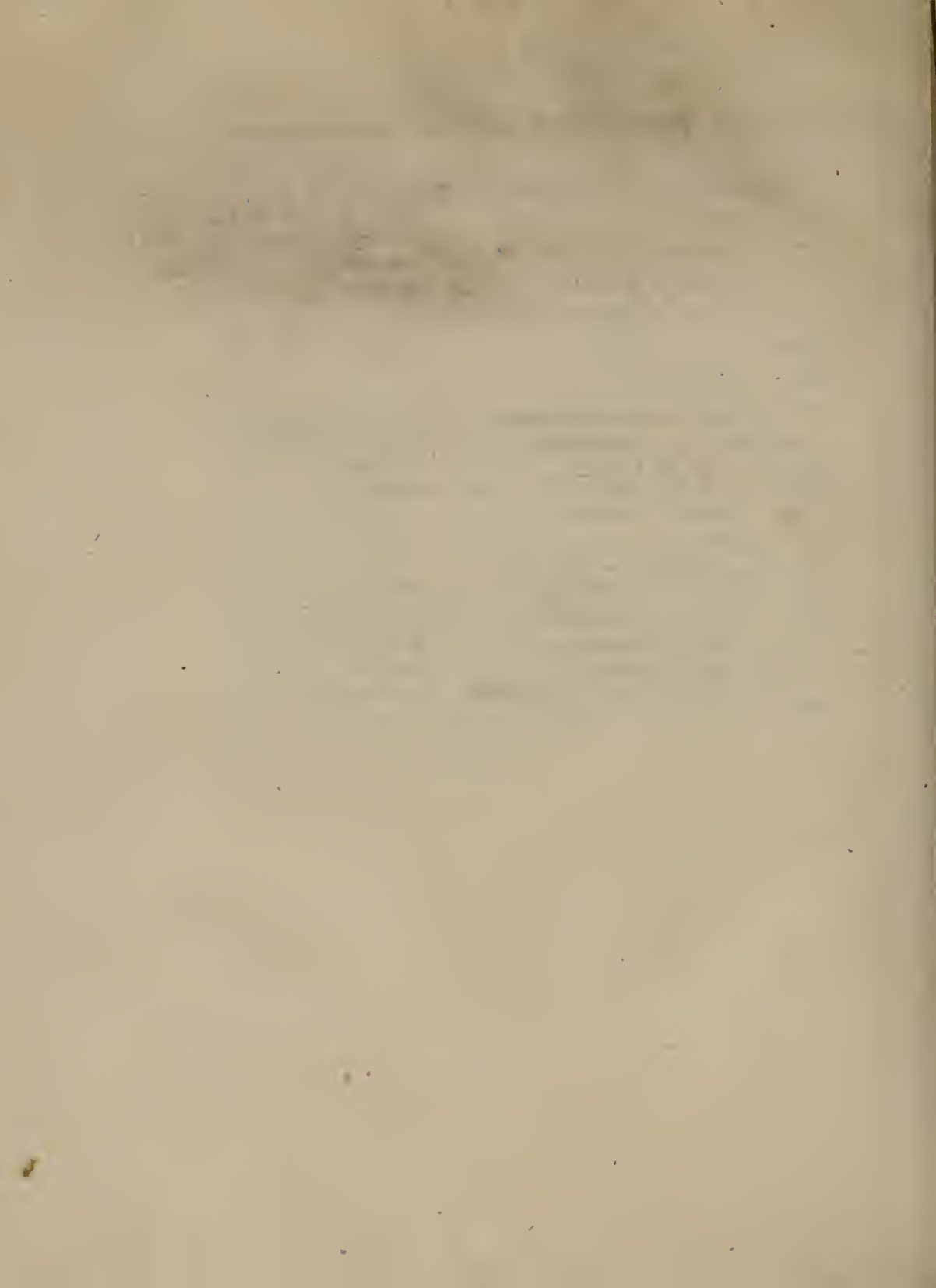
$(q - p) m + (m + 1)p$

158 26 contigues

ambigües

159 3 de la note se conforment

se confirment



## CENNI D'ORTOPEDIA

DEL CHIRURGO ERNISTA

BARTOLOMMEO BORELLA.

---

*Approvati nell' Adunanza delli 9 gennajo 1820.*

Da più di quindici anni applicato interamente a quella parte della chirurgia che vien detta *Ortopedia*, e che è l'arte di correggere i difetti, e le deformità nelle ossa del corpo umano, ebbi dalle attente mie osservazioni una convincente prova, che tutti i mezzi e gli apparecchi a tal uopo adoperati finora, e da me sperimentati, o erano inetti, o poco giovavano ad ottenere il proposto intento.

Nella maniera di curare fin qui praticata o fu incerta la riuscita, o di rado corrispose compiutamente alle molteplici sperienze, e modi di operare in questa spezie d'imperfezioni.

Dopo molte, e lunghe cure, e dopo molteplici, e ripetute prove nell'adattare altri più possenti apparecchi sono giunto finalmente a correggerli, a modificarli, e ad inventarne in gran parte de' nuovi, e massimamente per quei casi, che da molti autori classici non furono bene ed esattamente osservati, e descritti.

Fatto animoso della buona riuscita de' miei nuovi apparecchi in varie, e difficili cure di bambini, e di giovani, mi reco ad onore, e a dovere di presentare la mia macchina, ed i miei nuovi apparecchi all'imparziale giudizio della Reale Accademia delle Scienze, affinchè quando vengano dalla medesima approvati, io sia in grado di farli di pubblica ragione, onde tutti giovar se ne possano dopo aver conosciuta la loro indubitata utilità.

L'ordine che terrò nello esporre, e spiegare codesti miei lavori sarà il seguente.

Comincerò nelle due prime tavole dal porre sott'occhio quali sieno i difetti di cui mi sono più specialmente occupato nel curare; che sono cioè il piè torto all'infuori, difetto di cui non rinvenni finora presso verun autore una esatta descrizione, quindi parlerò del piede *equino* o di cavallo; esaminerò il piè torto leggermente all'indentro, collo stinco della gamba, che viziosamente inclina nello stesso senso; indi l'articolazione femoro-tibiale viziata anteriormente in un col piede torto leggermente all'infuori; il raggrinzamento permanente de' muscoli flessori della gamba; la gibbosità posteriore della spina dorsale; e finalmente terminerò col dar un cenno delle deviazioni laterali della spina stessa.



ARTICOLO I.<sup>o</sup>*Del piè torto all' indentro.*

Il piede torto all' indentro viene rappresentato nella tav. I. fig. I. La macchiua per correggere questa deformità rassomiglia ad un coturno, avente tutta la superficie interna morbidamente imbottita, entro cui il piede viene ritenuto fisso, ed immobile ( vedi tav. III. fig. I. ). Esso coturno è anteriormente allacciato alla foggia de' busti già in uso presso le donne: la sua parte inferiore ossia base ( vedi tav. III. fig. VII. ) consiste in una sottil suola di acciaio, che resta divisa in due porzioni anteriori ( fig. VII. *a* ) cioè, e posteriore ( fig. VII. *b* ), pressochè uguali, ed unite tra di loro per via d' un perno ( fig. VII. *c* ), pel quale la porzione anteriore si può rivolgere all' indentro, o all' infuori. Questo movimento vien graduato in ogni senso dall' estremità posteriore della semi-suola anteriore, che è semi-circolare, e dentata ( vedi fig. VII. *e* ), ed in cui viene ad incastrarsi una molla elastica ( vedi fig. VII. *f* ), situata e fissa nella semi-suola posteriore.

Nel sito della semi-suola anteriore, che corrisponde al dito grosso del piede si osserva una piastra mobile ( vedi tav. III. fig. VIII. ), che serve d'appoggio o contrasto all'avampiede allorchè è tratto all' infuori dall' azion della macchina.

Nella parte posteriore del coturno havvi una molla d'acciajo di figura semi-circolare (vedi tav. III. fig. I. *b*, e fig. VI. *f*),

alta un pollice, che dall'osso navicolare fa il giro del calcagno, e va a terminarsi al dissotto del malleolo esterno, col margine superiore obliquamente tagliato dall'alto in basso per ricevere il detto muscolo, ed evitargli così ogni contusione. Questa molla semi-circolare è inferiormente fissa ad una colonnetta d'acciajo, ( vedi tav. III. fig. 1. c ) che io denomino *porta lamina* semi-circolare; la qual colonnetta è sodamente unita alla semi-suola posteriore, dirimpetto alla tuberosità posteriore del calcagno ( vedi tav. III. fig. VII. g ). La detta lamina semi-circolare deve essere piegata in modo da modellare esattamente la parte che deve abbracciare; cioè dal sito in cui si articola l'osso astragalo al navicolare, attorno a tutto il calcagno, sin sotto il malleolo esterno, per conseguenza il braccio interno di detta lamina semi-circolare dovrà essere più lungo dell'esterno.

Devesi qui considerare per essenziale quella prominenza ( vedi tav. III. fig. IX. b ) che si vede lungo la faccia interna del lato interno della lamina semi-circolare a poca distanza dal piano orizzontale della suola, in modo che tra il detto piano, e la prominenza sopra enunciata viene lasciata una specie di scannellatura, che dà ricetto al margine inferiore, ed interno del calcagno spostato, lo abbraccia, costringendolo, sotto l'elaterio della macchina a rotarsi all'infuori secondo che la lamina semi-circolare riceve maggiore, o minor impressione dalla lamina perpendicolare, come verrà notato in appresso.

Nel margine esterno della semi-suola posteriore, e

precisamente dirimpetto al malleolo esterno ( vedi tav. III. fig. I. *d* ) vedesi sorgere un segmento d'acciajo ben temperato, il quale è piegato nella sua metà circa ad angolo leggermente ottuso all'esterno, che si scosta dalla perpendicolare, il quale rappresenta in certo modo un montante di staffa. Codesto segmento si può dividere in due parti, in superiore od ascendente, ed inferiore od orizzontale. La porzione orizzontale ( vedi tav. III. fig. III. *b* ) è unita saldamente alla semi-suola posteriore, e la porzione ascendente, ( vedi tav. III. fig. III. *a* ) è libera; nella metà circa della porzione ascendente si osserva una fenditura a forma di parallelogramma, che serve ad articolare la staffa colla lamina perpendicolare da descriversi ( vedi tav. III. fig. III. *e* ).

La molla perpendicolare ( vedi tav. III. fig. I. *e* ) si stende dalla fenditura della staffa ( vedi tav. III. fig. I. *f* ) sino all'articolazione femoro-tibiale; la sua massima curvatura ( vedi tav. III. fig. II. *a* ) è verso il terzo inferiore della medesima, dimodochè, tra la divergenza già notata della porzione superiore della staffa, e la curvatura della lamina perpendicolare si viene così ad ingrandire notabilmente il braccio di leva che deve offrire codesta molla perpendicolare, dalla qual cosa ne risulta, che essendo la detta molla perpendicolare allontanata dalla parte esterna della gamba si evita ogni contusione, ed imprimendo questa un maggior grado di rotazione al calcagno, lo trae dietro di se, e lo costringe a prender la natural sua posizione.

La lamina perpendicolare un pò più scostata dalla gamba,

oltrechè, come già si disse, evita ogni contusione ad essa, serve pure egregiamente di sodo sostegno al piede, risparmiando la stampella allo storpio in caso di piede torto cronico.

Nell'estremità inferiore della lamina perpendicolare havvi un chiodetto in forma di lettera T (vedi tav. III. fig. III. e), il quale penetrando dall'esterno all'interno nella fenditura parallelogramma sopra descritta, annoda la detta lamina colla staffa medesima in modo movibile da permettere al piede di poter eseguire i movimenti di flessione, e di estensione.

L'estremità superiore della lamina perpendicolare rappresenta il punto movente della leva che è messa in azione da una circolare imbottita (vedi tav. III. fig. I. g) riunita superiormente ad essa molla. Tale circolare può imprimere inferiormente più, o men forza alla molla perpendicolare in ragion diretta che dessa viene più o meno stretta superiormente alla gamba.

Questa succinta spiegazione unita alla minuta descrizione dei pezzi componenti l'intero apparecchio delineati nella tavola III. basterà a schiarire come sia organizzato codesto elastico apparecchio, il quale, nel tempo stesso che rivolge insensibilmente, e per gradi l'avampiede, rota pure nel senso naturale il calcagno a giusto perpendicolo colla tibia.

Il modo d'applicare questo mio apparecchio è il seguente. Si deve prendere il piede torto congenito, od accidentale, e situare il calcagno nel cavo della mano sinistra, e colle

dita della medesima mano abbracciare il più che si potrà il dorso del piede. La mano destra deve impadronirsi dello avanpiede, e leggermente portarlo infuori senza però occasionar dolore, o molestia veruna. Ciò premesso si farà situare da un assistente il coturno slacciato per ogni dove al dissotto del piede, ed a misura che la mano sinistra abbandonerà la parte impugnata, si farà discendere il calcagno sin nel fondo del coturno, usando ogni possibile diligenza affinchè venga ricevuto nella scanellatura ( vedi tav. III. fig. IX. *b* ) antecedentemente dimostrata. Quindi prima che la mano destra abbandoni l'avanpiede, la sinistra riprenderà a un dipresso la medesima posizione, colla sola differenza, che in questo caso impugnerà la parte posteriore del coturno in un col dorso del piede, e terrà fermo e fisso l'uno, e l'altro, sintantochè colla mano destra, ovvero da un assistente venga il coturno moderatamente allacciato.

Ciò fatto, se la posizione data all' avanpiede nel mentovato coturno non fosse convenevole, allora si diriggerà dolcemente all' infuori la parte anteriore della suola per tanti gradi, quanti ne potrà tollerare l'animalato, poscia portando orizzontalmente la lamina perpendicolare, si introdurrà nella fenditura della staffa il chiodetto in detta lamina perpendicolare infisso, ( vedi tav. III. fig. III. *e* ) e mediante un mezzo giro, che si farà eseguire all' anzi-detta molla, si alzerà, e si porterà a parallelo colla gamba ( vedi tav. III. fig. I. *e* ).



Il chiodetto che ha il capo a forma di T s'incrociechia al di là della fenditura, ed in questo modo viene a formare una specie di articolazione tra la staffa, e la molla, (vedi tav. III. fig. I. *f*) la quale permetterà benissimo al piede di flettersi, ed estendersi. Si legnerà poscia l'estremità superiore della lamina perpendicolare al ginocchio mediante la circolare (vedi tav. III. fig. I. *g*), avendo però sommo riguardo di non istringerla di troppo in principio della cura.

Pendente quindici giorni bisognerà vedere il piede per due, o tre volte nella giornata, e riadattarlo nella macchina se si fosse spostato, ciò che accaderà facilmente nei primi giorni della cura, massime se la torsione è grande; a poco a poco il piede cominciando a prendere una posizione approssimantesi di più alla naturale, allora non farà più d'uopo di vederlo che una, o due fiate per settimana; e sei mesi d'assistenza bastano per curare qualunque torsione di questo genere, purchè il ragazzo non abbia oltrepassato l'età d'anni quattro, in cinque, oltre la qual età si esige più tempo ad ottenerne la cura.

Questa macchina, come altresì tutte le altre che ho inventato, e messo in uso per le diverse specie di piede torto, ha il vantaggio di poter facilmente essere inchiusa in una comune scarpetta, e così permettere allo storpiato di subito passeggiare senza che ne provi il menomo imbarazzo.

## ARTICOLO II.º

*Del piede torto all' infuori.*

La tavola IV. fig. I. dimostra qual sia la macchina di cui mi servo per correggere il piè torto all' esterno. Questa specie di torsione ( vedi tav. I. fig. II. ) che ho potuto riscontrare essere sempre consociata a paresi dei muscoli adduttori, e deduttori del piede, consiste specialmente in una somma facilità allo scivolamento laterale dell'osso astragalo nella cavità articolare tibio-peronea, osservazione costante che non trovo finora fatta da nessuno che io mi sappia. Codesto caso esige, che ben diverso sia il macchinamento da quello usato pel piede torto all' indentro.

L'apparecchio da me immaginato per curare il piede torto all' esterno figura pure un coturno ( vedi tav. IV. fig. I. ), avente per suola un' intiera lamina d' acciaio ( vedi fig. III. *a* ), le di cui parti laterali posteriori corrispondenti ai malleoli ( vedi fig. III. *b b* ), si allargano a foggia di ali per rivolgersi all' insù, onde servire di unione snodata ( vedi fig. I. e III. *d* ) a due lamine ( vedi fig. I. e II. *c* ) che si alzano perpendicolari ai due malleoli sin sotto i capi superiori articolari della tibia, ove mediante due coreggie circolari ( vedi fig. II. *ffff* ) vengono all' arto riunite e fissate.

Siccome l'azione di questo apparecchio ad altro non tende che a tenere a giusto perpendicolo su di se stesso

l'asse calcaneo-tibiale, lasciando in perfetta libertà il moto di estensione, e di flessione del piede: così lievemente si scorge andar errati coloro, che insegnano doversi curare questo difetto collo stesso macchinamento destinato a correggere il piede torto all'interno.

Il modo di applicar codesta macchinetta è il seguente: prendasi l'avampiede colla mano destra, e colla sinistra si tenga il coturno, il quale avrà le due lamine perpendicolari rivolte posteriormente, e quasi poste orizzontalmente, affinchè non impediscano l'operazione: poscia s'introduca il piede in modo, che la pianta si adatti esattamente alla suola imbottita del coturno: si allacci il medesimo (vedi fig. II. g): si alzino finalmente le due perpendicolari, e si terminerà l'operazione col legarle amendue convenevolmente colle adattate coreggie.

Non fa d'uopo in questo caso d'usar diligenza veruna in rimettere il piede, tanto egli è flessibile, che il solo riconducimento delle lamine perpendicolari basta per porre, e mantenere il piede a giusto perpendicolo colla tibia. S'investa il piede in un col coturno con una comune scarpetta, e si lasci camminare il bambino, che quivi non vi è pericolo alcuno di spostamento del piede.

Per la cura di questa difformità si esige un tempo uguale a quello che si deve impiegare pel piede torto all'interno: ma pel piede torto all'infuori non fa d'uopo di tanta attenzione.

## ARTICOLO III.°

*Del piede Equino.*

Per curare il piede *equino* ( vedi tav. I. fig. III. ) propongo una macchina, la quale è in gran parte consimile a quella stabilita per la cura del piede torto all' infuori.

Il piede *equino* consiste essenzialmente nel vizioso ruotamento all' inavanti della faccia superiore del corpo dello astragalo, motivo per cui il piede è mantenuto in una continuata estensione del tendine d' achille oltremodo teso.

È necessario che il meccanismo tenda ad agire incessantemente, e direttamente sull' astragalo, e sulla corda magna, onde così obbligare il piede a flettersi sulla gamba. Ciò si effettua 1.° col mezzo dell' immobilità data a tutto il piede, mediante la suola d' acciaio ( vedi tav. V. fig. III. ), ad eccezione dell' articolazione astragalo-tibiale ( vedi tav. V. fig. I. e II. *d* ), che è libera, per essere la macchina in tal sito snodata: 2.° in virtù delle due lamine spirali ( vedi tav. V. fig. I. e II. *e* ) collocate lateralmente una per parte sulle lamine perpendicolari ( vedi tav. V. fig. I. e II. *c c* ) ad una data distanza dai malleoli, le quali lamine spirali comunicano alla suola un' azione flessiva coll' ajuto di due nastri di seta ( vedi tav. V. fig. I. e II. *ff* ), fissi uno per parte alle estremità libere di ciascuna lamina spirale, che vanno ad unirsi a due altri nostri corrispondenti ( vedi tav. V. fig. I. e II. *g* ), i quali si attaccano alla parte anteriore, e laterale della suola ( vedi tav. V. fig. III. *h* ),

Le anzidette lamine spirali possono presentare maggior o minor forza, in ragione che si vorranno caricar più o meno di elatère.

Illo divisato di costruire la suola in due pezzi distinti, affinchè potesse girare in semi-rotazione (vedi tav. V. fig. III. *d*), quasi come nel caso di piede torto all' indentro, e ciò soltanto per dimostrare, che ove mai si riscontrasse nella torsione *equinea* anche qualche lieve tendenza dell' avanpiede a volgersi all' indentro, od all' infuori, in ogni modo ci si potesse contemporaneamente ovviare, altrimenti si farà uso della suola intiera tal quale si vede delineata nella tavola IV. fig. III.

Non essendo mai, per la forza distendente delle lamine spirali, interrotta l'azione della macchina sul tendine di achille, sia che l'ammalato sieda, cammini, oppur giaccia, si ottiene perciò il riconducimento del piede spostato al suo sito naturale, in forza dell' estensione, ed allungamento del suddetto tendine d' achille, insensibilmente e senza dolore, o notevole molestia stato rilasciato.

L' applicazione di codesta macchina è la medesima che quella del piede torto all' esterno, tanto per rapporto al coturno, quanto alle lamine perpendicolari.

In codesta macchinetta vi sono di più gli elastici spirali, che sono li principali agenti per flettere il piede al punto d' unione a cerniera dell' osso astragalo colla tibia, e peroneo; perciò li detti elastici saranno, mediante i loro nastri corrispondenti, affibbiati alla suola con moderazione, come



altresì le coreggie che sono unite alla colonnetta messa posteriormente al calcagno ( vedi tav. V. fig. I. e II. *h* , e fig. III. *g* ), le quali coreggie servono per comprimere dolcemente la prominenza che fa anteriormente il corpo dell'osso astragalo ( vedi tav. I. fig. III. *a* ), devono pur anche essere serrate con somma precauzione per non recar molestia.

Inchiuso codesto apparato in una conveniente scarpetta, può l'ammalato passeggiare con somma facilità e sicurezza d'ottenerne l'intento. Si deve però osservare, che codesta cura esige un dispendio di tempo maggiore delle precedenti.

#### ARTICOLO IV.º

##### *Della curvatura della gamba congiunta colla torsione del piede.*

Il piede torto alquanto indentro collo stinco della gamba piegato nel medesimo senso, come puossi osservare nella tavola I. fig. IV., sono soventemente una conseguenza di una certa qual robustezza e vivacità precocemente sviluppata nei bambini, e dell'imprudenza degli assistenti nell'abbandonarli al loro desiderio nel camminare.

L'apparecchio che propongo per tale viziatura, e che da me fu spesso volte messo in uso con felice successo è il seguente.

Esso rappresenta nella sua parte inferiore un coturno simile al già descritto per il piede *equino* ( vedi tav. VI.

fig. I. *ak* ), ad eccezione della colonnetta, e dei nastri.

Le lamine perpendicolari ( vedi tav. VI. fig. I. *bb II* ) sono più lunghe di quelle del citato apparecchio, e pervengono sino all' articolazione della tibia, e fibola coi condili del femore, ove mediante due perni, uno per parte, si uniscono artatamente a due altre lamine, ( vedi tav. VI. fig. I. *cc nn* ) ( che chiamerò femorali per distinguerle dalle inferiori, o surali ), le quali lamine femorali si estendono sino alla metà della coscia. La lamina femorale esterna è anteriormente unita alla interna per un semi-cerchio d' acciaio da me chiamato rotulejo ( vedi tav. VI. fig. I. *d* ) in tale sito postato, e reso immobile per mantenere ognora parallele le lamine tanto femorali, che surali, affinchè agiscano sempre di consenso.

Alla faccia esterna della lamina femorale esterna sono due pezzi fissi, che rappresentano ciascuno una specie di ponte ( vedi tav. VI. fig. I. *ff* ) sotto cui può scorrere colla massima facilità la porzione inferiore di una placca, o piastra d' acciaio ( vedi tav. VI. fig. I. *e* ), che denomino piastra femorale, la quale va a terminare superiormente al gran troncantere. In codesto sito la detta piastra femorale si unisce in modo flessibile ad un pezzo, a cui superiormente si attacca un altro semi-cerchio denominato iliaco ( vedi tav. VI. fig. I. *h* ) il quale unito ad una lunga coreggia, che dalla parte posteriore fa il giro di tutto il bacino, viene ad infiggersi ad un chiodetto fisso nell'estremità anteriore del suddetto semi-cerchio.

La denominata piastra scorrevole, che si può allungare, od accorciare a piacimento mediante una vite (vedi tav. VI. fig. I. *g*), serve a portar l'articolazione superiore della macchina sempre di concerto coll' articolazione della testa del femore col bacino; e la piastra (vedi tav. VI. fig. I. *ii*) che trovasi unita alla faccia interna della lamina surale comprime col mezzo di due viti (vedi tav. VI. fig. I. *jj*) gradualmente la convessità della tibia incurvata (vedi tav. I. fig. IV. *a*).

La suola mobile serve per ricondurre insensibilmente l'avanpiede alla naturale direzione.

Per applicare questa macchina si flettino sulla parte anteriore del coturno le lamine surali, e si introduca il piede nel coturno stesso, il quale verrà moderatamente allacciato tostochè si riconoscerà, che il piede occupa intieramente tutto il cavo di detto coturno: si rialzino quindi le lamine surali, e si allarghino dolcemente al sito dove deve passar il ginocchio, sinchè la gamba sia bene tra le due lamine suddette situata. Si adatteranno poi le lamine femorali alla coscia in modo, che l'arco rotulejo sia scostato di qualche linea dalla rotella, e dalla coscia, e si fissino le coreggie alli rispettivi bottoncini (vedi tav. VI. fig. I. *pppp*). Rimane il semicerchio iliaco, il quale per se si adatta ai lombi, e mediante una circolare imbottita, che termina in una coreggia bucherata, va ad infiggersi alla estremità anteriore di detto semicerchio. Ciò fatto si osserverà se la piastra surale comprime già sufficientemente la

convessità della gamba ( vedi tav. I. fig. IV. *a* ) ; in caso contrario si faranno girare le viti di contro detta piastra, la quale si muoverà facilissimamente, e premerà in ragione che sarà astretta dalle viti medesime.

Nel caso di ambe le estremità difformate, siccome in allora due sarebbero li semicerchi iliachi situati uno per parte, egli è inutile l'avvertire, che tra di loro si uniranno tanto anteriormente, che posteriormente, annullando con ciò la circolare imbottita.

## ARTICOLO V.

*Della viziatura del ginocchio, in cui l' articolazione femoro-tibiale cede anteriormente, e si flette in questo senso.*

Il macchinamento da me inventato per correggere il piede torto all' infuori, coll' articolazione del ginocchio, che viziosamente propende, e reclina assai all' indietro verso il poplite ( vedi tav. II. fig. I. ), è il seguente.

Esso rassomiglia in gran parte al testè descritto; solo differisce dal medesimo 1.° nella suola, che quivi deve essere intiera, e simile a quella delineata nella tavola IV. fig. III.; per dimostrare che in questo caso si deve considerare la torsione del piede all' infuori; ben inteso che nel caso di torsione all' indentro, allora uopo è di usare la suola a suo luogo già dimostrata. 2.° Che quivi havvi una

piccola colonnetta (vedi tav. VI. fig. I. *m*), infissa nelle lamine surali esterna, ed interna, in vicinanza precisamente della riunione di codeste lamine colle lamine femorali corrispondenti, le quali al sito ove incontransi coll'anzidetta colonnetta, essendo per alcun tratto mancanti (vedi tav. VI. fig. I. *o o*), fan sì, che il movimento del ginocchio viene ad essere limitato alla sola flessione, ed estensione naturale, mediante il suddetto contrasto.

E siccome in questa specie di complicata deformità il massimo, ed il più importante difetto a correggersi era quello dell'articolazione del ginocchio che incurvasi anteriormente: e che quanto più il corpo gravita sulla parte viziata, altrettanto essa articolazione cede, reclina, e si deforma; ed infine invece di presentar anteriormente la coscia colla gamba una linea, che si accosti alla perpendicolare, presenta all'opposto una curva più o meno ampliata, così fa d'uopo di porre posteriormente un argine sodo a codesta inclinazione viziosa con un adattato apparecchio, mediante il quale, colla massima semplicità, e senza impedire in verun modo all'arto il suo movimento, io sono riuscito a correggere una tale deforme viziatura.

Credo inutile l'avvertire, che la piastra posta alla lamina surale esterna (vedi tav. VI. fig. I. *ii*) del già descritto apparecchio, in questo nostro caso si deve del tutto sopprimere.

Il modo di applicare questo apparecchio è affatto simile all'antecedentemente descritto.



## ARTICOLO VI.

*Della permanente flessione della gamba.*

Alcune volte mi accadde nelle varie, e bizzarre deformità da me curate di dover soccorrere certi infelici di tenera età, che col lungo rimaner assisi (cioè, che per lo più suole accadere presso alcune mercenarie, e vili nutrici), od abitar in luoghi malsani, e per lunghe malattie sofferte, restarono colle articolazioni femoro-tibiali piegate in modo, che non potevano più far l'estensione della gamba sulla coscia (vedi tav. II. fig. II.), ed in tale stato erano obbligati a far uso delle stampelle onde potere camminare.

Tale si rinviene essere la forza preponderante de' muscoli flessori della gamba in questi casi, che allorquando si tenta di distendere codesta articolazione, scevra per altro da anchilosi, li tendini dei muscoli bicipite (vedi tav. II. fig. II. *a*), semimembranoso, e semitendinoso, fanno una resistenza inesplicabile. Pure codesta viziatura fu da me più volte radicalmente corretta col seguente apparecchio estensivo a tal fine da me immaginato.

Desso non è molto dissimile dalli due ultimi descritti: ma quivi non si riscontrano nè piastra alla lamina surale esterna, nè suola d'acciajo, nè contrasto nel sito dell'articolazione del ginocchio; e perchè ora supponiamo non esistervi che la sola raggrinzatura ostinata della gamba sulla coscia, essendo tutto il restante dell'estremità inferiore li-

bero da ogni deformità, ragion voleva che qui si abolisse la suola d'acciajo assieme al rimanente, per sostituirvi un pezzo elastico rappresentante una staffa (vedi tav. VI. fig. II. *b*), la quale è riunita alle lamine surali (vedi tav. VI. fig. II. *c*) al sito de' malleoli per il libero movimento di quest' articolazione. Alla detta staffa si trova fissata una scarpa comune per ricevere il piede (vedi tav. VI. fig. II. *a*).

Il vizio poi esistente al ginocchio trattenuto dall'estremo raccorciamento dei muscoli summenzionati, viene con vigore combattuto dalla non mai interrotta forza elastica esercitata da una molla a spira (vedi tav. VI. fig. IV) collocata attorno al perno (vedi tav. VI. fig. II. *h*), su cui vengono riunite le due lamine esterne, cioè la femorale colla surale per formar l' articolazione del ginocchio.

Con questo semplicissimo apparato, come già dissi, pervenni parecchie volte in poche settimane a far deporre le stampelle all'ammalato, potendo benissimo reggersi in piedi col solo ajuto delle macchinette: ed in termine di alcuni mesi si equilibrano sì fattamente le forze muscolari dell' articolazione femoro-tibiale mediante tale elastico estensivo, che il fanciullo, deposto ogni sorta d'apparecchio, si trova capacissimo a sostenersi da se medesimo senza alcun altro ajuto di sorta.

Prima di applicar questo apparecchio resta indispensabile di levar dal suo luogo la molla spirale (vedi tav. VI. fig. II. *i*), che è quella che mantiene in continua estensione la

macchinetta; altrimenti ne riescirebbe difficile, ed anche molesta l'applicazione. Levata adunque dal suo sito la molla, si introdurrà il piede nella scarpa; ed il restante del macchinamento sarà applicato nello stesso modo indicato nella spiegazione della macchina pel piede torto alquanto indentro, collo stinco della gamba ecc.

Quando il tutto sarà sufficientemente al suo posto collocato, s'introduca l'estremità più lunga e superiore della molla spirale nel foro che si trova nella testa della colonnetta (vedi tav. VI. fig. II. *j* e fig. IV. *c*), quindi si collocherà d'attorno il perno che forma l'articolazione femoro-tibiale dell'apparecchio (vedi tav. VI. fig. II. *h*), e l'altra estremità sarà condotta di rimpetto al bottone (vedi tav. VI. fig. II. *k* e fig. IV. *b*), che serve per annodar la coreggia corrispondente all'arco rotulejo (vedi tav. VI. fig. II. *l*).

Questa molla estensiva prende l'appoggio nella colonnetta, la potenza nell'attortigliamento, e la resistenza contro il bottone; essendo perciò l'arto viziato trattenuto in questa continua estensione, il risultato ne è sempre felice. Notisi qui di passaggio, che la molla deve essere in principio di cura di poco elaterio; dovendosene però nel decorso della cura aumentar la forza, si farà ciò insensibilmente, affinchè le distensioni non siano troppo subitance, quindi moleste, e spesso anche dolorose.

## ARTICOLO VII.

*Del mezzo di correggere alcune curvature  
della spina dorsale.*

Sin qui trattai degli elastici apparecchi da me inventati onde correggere molte difformità delle estremità inferiori; ora imprendo a descrivere un grande elastico apparecchio da me immaginato, e sempre con ottimo successo impiegato, che dalla pianta de' piedi si estende sin sotto le ascelle, per offrire un sicuro e permanente appoggio tanto nel camminare, che nel sedere a coloro, che per viziosa inclinazione della colonna vertebrale sono incurvati; o che la detta colonna sia piegata lateralmente, come si può osservare nella tavola II. fig. III. e fig. IV.

Potendo questo grande apparato essere diviso in due parti in superiore cioè, ed in inferiore, sarà più agevole per me il dividerlo, per dimostrarlo.

La parte inferiore di questo grande apparato dovendo servire di base soda, e costante alla parte superiore, ed adattarsi nel medesimo tempo ai movimenti della progressione, non era sì facile il ritrovare altro mezzo che riunisse alla solidità una certa flessibilità nelle sue diverse parti, se non se nelli apparecchi già descritti.

Posto per base che gli apparecchi nella tavola VI disegnati possano benissimo adattarsi al nostro caso, anzi essere ciò che più conviene, massime se per un istante vo-

gliamo supporre avere il gibboso anche le estremità inferiori viziate, caso che non di rado mi occorre di osservare, ed in cui fosse d'uopo adoperare l'apparecchio notato alla fig. 1.<sup>a</sup> della tavola VI per il lato destro, e sinistro, onde correggere nel tempo stesso la viziata colonna vertebrale, ed entrambi le estremità inferiori affette, non sarà necessaria altra spiegazione per comprendere, che li detti apparecchi debbano per conseguenza servire di base al grande apparato, e portare in questo caso il nome di *Parte inferiore del grande apparecchio*.

Codesta parte inferiore però non comprende per esempio in intiero tutto l'apparecchio disegnato nella tavola VI. fig. 1.<sup>a</sup>, giacchè esso in questo caso termina colla lamina femorale esterna, escludendo la piastra scorrevole, che fa corpo colla parte superiore di detto grande apparecchio; epperchè parlando della parte inferiore di codesto grande apparecchio intendo significare l'essere desso composto per ciascuna estremità di una suola, o scarpa; di due lamine surali, od inferiori; di due femorali, o superiori, e di un arco rotulejo.

Il primo pezzo che si presenta dopo di aver dato un colpo d'occhio alla parte inferiore del grande apparecchio egli è una piastra scorrevole (vedi tav. X. fig. I. *a*) per ciascun lato, corrispondente alla region superiore del femore, mediante la quale piastra si unisce la parte inferiore colla superiore del grande apparecchio.

Codesta piastra scorrevole differisce alquanto di figura



dalla già descritta nella tavola VI. fig. III. perchè quivi ha il suo margine posteriore della porzione superiore assai prolungato, ed angolare (vedi tav. VII. *b*), il di cui uso verrà significato in appresso.

La detta piastra scorrevole si unisce colla sua estremità superiore, e dirimpetto all' articolazione del femore (vedi tav. VII. *d*), ad una lunga lamina elastica (vedi tav. VII. *c*), che dal suo uso viene chiamata *sostenitrice*, la quale dal punto d' unione colla piastra scorrevole si prolunga sin sotto le ascelle.

Sulla parte esterna dell' estremità superiore di detta lamina sostenitrice vi scorre una lamina d'acciajo (vedi tav. VII. *e*), la quale alla sua parte superiore termina a figura di semi-luna, o grucciona (vedi tav. VII. *f*) per ricevere le ascelle.

A distanza d' un pollice sopra l' articolazione di detta lamina sostenitrice colla piastra scorrevole di ciascun lato si osserva un pezzo di acciaio cavo, in cui viene a conficcarsi un grande, e robusto semicerchio (vedi tav. VII. *h*), che dalla regione iliaca d' un lato, passando sopra l' osso sacro, va a terminare all' altro lato.

Questo semicerchio, chiamato *lombale*, viene fissato ad ambe le lamine sostenitrici col mezzo di una vite.

Nella metà precisa di codesto grande, e robusto semicerchio (vedi tav. X. fig. II. *aa*) si riscontra un pezzo di acciaio cavo (vedi tav. X. fig. II. *c*), destinato a ricevere una robusta spranga (vedi tav. X. fig. III. *a*), che da

questo punto si alza quasi perpendicolarmente sino alle spalle, per terminare in due ale ( vedi tav. IX. *m* ), a ciascuna delle quali vi è infissa una coreggia ( vedi tav. IX. *pp* ), la quale coreggia passando sopra le spalle ( vedi tav. VIII. *ee* ) va ad affibbiarsi all'estremità anteriore di ciascun pezzo a semi-luna o grucciona, in un chiodetto corrispondente ( vedi tav. VIII. *f* ).

La detta spranga che chiamerò *vertebrale*, ( vedi tav. IX. *i* ) è verso li due terzi superiori alquanto convessa, e bucherata per dar passaggio ad una lunga vite ( vedi tav. IX. *k* ), che porta avanti, od indietro una piastra ben imbottita ( vedi tav. IX. *l* ), e che forma il compressore della spina dorsale deviata. E qui notisi, che il semicerchio lombale, la spranga, ed il compressore saranno soppressi allorchè si tratta di deviazioni laterali della colonna vertebrale.

Le lamine sostenitrici sono per la loro parte superiore mantenute in sito da un corpetto ( vedi tav. VIII. *a* ), al quale le dette lamine sono connesse mediante alcuni nastri ( vedi tav. VIII. *cccc* ); e per corroborare l'azione del corpetto, si sono aggiunte delle coreggie ( vedi tav. VIII. *d* ), che facendo il giro del corpo vanno ad affibbiarsi ad alcuni chiodetti, che tratto tratto si riscontrano lungo le lamine sostenitrici.

Tutto codesto grande apparecchio è, come già dissi, per la più gran parte da me stato messo in uso con sommo vantaggio nelle deviazioni sì laterali, che posteriori della colonna vertebrale. E la massima parte del vantaggio

che si ottiene si deve specialmente all'appoggio sodo, che da terra mediante le estremità inferiori viene alle lamine sostenitrici continuato (vedi tav. VIII.): poichè essendo le lamine sostenitrici assicurate, e mantenute nella progressione sempre a contatto delle ascelle, ne viene con ciò impedito ogni movimento laterale della spina dorsale, non che tenuta la medesima in continua estensione.

Codesta estensione ha il vantaggio che non viene interrotta nemmeno allorquando l'ammalato siede, e ciò in grazia del prolungamento del margine posteriore della piastra scorrevole (vedi tav. IX *b*), il quale prolungamento, sorpassando l'altezza della tuberosità ischiatica, allorchè l'ammalato sta assiso, prende un appoggio non men sicuro che necessario sulla sedia stessa, senza che l'azione della macchina ne sia diminuita.

Non riuscirà discaro l'avvertire che allorquando le estremità inferiori sono libere da ogni sorta di deformità, allora si devono annullare e la suola di acciaio, e la piastra compressiva degli apparecchi nella tavola VI. fig. I. delineati, essendo solo sufficiente l'apparecchio, quale viene rappresentato alla fig. II. di detta tavola VI., ad esclusione della molla elastica estensiva, che si dovrà pure sopprimere.

L'Autore delli descritti chirurgici apparecchi osa sperare, che non sarà per riuscir discaro alla Reale Accademia delle Scienze un tale argomento perfezionato dall'esperienza, e sanzionato da una lunga pratica.

Per maggiore intelligenza di questo scritto si raccomanda al lettore di consultare attentamente la spiegazione delle tavole.

## SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.<sup>a</sup>

FIG. I.

*Piede destro torto congenitamente all' indentro , nel qual vizio si trovano presso a poco tutte le ossa deviate dalla sede loro naturale.*

- a* Malleolo esterno.
- b* Angolo acuto formato dalla viziosa piegatura del margine interno del piede colla gamba.
- cc* Deforme convessità del margine esterno , che dalla tuberosità posteriore del calcagno si stende sino allo avampiede.

FIG. II.

*Piede destro torto congenitamente all' infuori , in cui soltanto l' astragalo ha acquistato lateralmente un movimento disordinato , ed il restante del piede è ben conformato.*

- a* Malleolo esterno.
- b* Faccia esterna del calcagno , il quale , per essere il piede viziosamente tratto all' infuori , ed all' insù , tocca quasi il malleolo esterno.
- cc* Pianta del piede , che non si discosta dalla natural figura.
- dd* Margine interno del piede , su cui poggia l' individuo quando cammina.

FIG. III.

*Piede sinistro equino, ossia di cavallo, accidentale.*

- a* Prominenza formata dall'osso astragalo ruotato viziamente all'in avanti, senza punto abbandonare l'articolazione a cerniera delle ossa tibia, e peroneo.
- b* Calcagno portato in alto dalla smodata tensione della corda magna.
- c* Somma flessione dell'avanpiede, motivo per cui lo storpio stentatamente cammina per l'insufficiente appoggio.

FIG. IV.

*Deforme piegatura all'esterno della gamba destra vista di fronte, con lieve torsione all'indietro del piede.*

- a* Centro della somma convessità della gamba.
- b* Curvatura.
- c* Porzione dell'avanpiede che si rivolge alquanto indietro, ed in alto.
- d* Margine esterno dell'avanpiede, su cui l'ammalato nel camminare poggia leggermente.

TAVOLA II.<sup>a</sup>

FIG. I.

*Viziosa flessione anteriormente dell'articolazione femoro-tibiale.*

- a* Centro della curva, che presenta anteriormente l'articolazione femoro-tibiale.



- b* Somma convessità che risulta dalla viziosa piegatura del ginocchio anteriormente.
- c* Rughe tegumentali indicanti una lieve torsione all'in fuori del piede.

FIG. II.

*Questa figura rappresenta un accorciamento viziato dei muscoli flessori della gamba in modo, che impediscono l'estensione assoluta dell'arto.*

- a* Bicipite, termine del muscolo raccorciato.

FIG. III.

*Gibbosità ed incurvatura della spina dorsale.*

- a* Centro della deviazione corrispondente alle ultime vertebre dorsali.

FIG. IV.

*Deviazione della spina dorsale, la quale rappresenta in certo modo lateralmente un *f* lungo posto a rovescio.*

- a* Vertebre cervicali, che formano la parte superiore del *f*.
- b* Vertebre dorsali, che formano la parte mezzana del *f* ossia il corpo.
- c* Vertebre lombari, che formano la coda del *f*.
- d* Estremità posteriore delle costole destre assai ricurve, le quali formano posteriormente lungo tutta la regione dorsale una notevole protuberanza gibbosa.

- e* Obliqua depressione del corpo di tutte le costole sinistre, ove si osserva quasi sempre un accavallamento delle costole stesse prodotte dalla gran curvatura laterale di tutte le vertebre dorsali, le quali non potendo più reggere sul loro asse la parte superiore del corpo, lo lasciano trascinare sulla parte incurvata.

TAVOLA III.<sup>a</sup>

FIG. I.

*Apparecchio elastico in sito proprio per ricondurre nella sua natural direzione il piede torto all' indentro congenito, od accidentale, che rappresenta una specie di coturno.*

- aa* Morbida imbottitura di pelle, che forma la parte superiore del coturno visto dal lato esterno.
- b* Lamina semi-circolare.
- c* Colonnella *porta lamina semi-circolare*, la quale superiormente si unisce alla detta lamina semicircolare; ed inferiormente alla parte posteriore della suola da descriversi.
- d* Pezzo apparente, od ascendente della staffa annessa alla parte laterale esterna, e posteriore della suola.
- e* Lamina perpendicolare, ed elastica.
- f* Articolazione della lamina perpendicolare colla parte ascendente della staffa.
- g* Circolare imbottita che cinge il ginocchio: ad un'estremità di essa vi è infisso un segmento d'acciajo, a

cui è unito un ponte, per dar passaggio, e fissar all'uopo la lamina perpendicolare; l'altra estremità termina in una coreggia di cuojo bucherata.

- h* Laccio, con cui si stringe il coturno.
- i* Taglio a triangolo isoscele del coturno al lato esterno, per facilitar il movimento ginglymoideo della suola.
- jj* Porzione del coscinetto, ossia soprapiede.

FIG. II.

*Lamina perpendicolare vista di fianco.*

- a* Massima convessità verso l'estremità inferiore.
- b* Chiodetto che serve ad articularla colla staffa *d* fig. I.

FIG. III.

*In questa figura si osserva la staffa per intiero, con un pezzo inferiore della lamina perpendicolare.*

- a* Staffa, che prolungandosi, e ripiegandosi in
- b* Si unisce sodamente alla parte laterale esterna, e alquanto posteriore della suola, mediante li fori *cc*.
- d* Porzione inferiore della lamina perpendicolare.
- e* Chiodetto della lamina perpendicolare, e fenditura parallelo-gramma della staffa, che formano l'articolazione *f* fig. I.

FIG. IV.

*Lamina perpendicolare unita alla circolare.*

- a* Lamina perpendicolare.

- bb* Segmento d'acciajo, a cui si unisce la circolare imbottita *c* che termina in una coreggia bucherata *d*.
- e* Ponte fisso nel detto segmento, sotto cui passa la lamina perpendicolare.
- f* Vite, che trafora il ponte *e* per fissare la lamina perpendicolare. Essa vite ha la testa alquanto elevata, e ritondata; e così serve per chiodello o bottone a ricevere la coreggia *d*.

FIG. V.

*Segmento d'acciajo disgiunto dalla circolare e fig. IV.*

- aa* Segmento d'acciajo.
- b* Ponte fisso sul segmento, sotto cui scorre la lamina perpendicolare.
- c* Vite che assicura a piacimento la circolare alla lamina perpendicolare.

FIG. VI

*Il coturno visto dalla parte laterale interna.*

- aa* Parte superiore del coturno.
- b* Cuscinetto di morbida pelle fisso ad uno dei margini anteriori ove si allaccia il coturno.
- c* Piastra mobile, ossia appoggio dell'avampiede.
- d* Imbutto, entro cui scorre il gambo della suddetta piastra.
- e* Laccio.
- f* Braccio interno della lamina semi-circolare.

FIG. VII.

*Parte inferiore del coturno , ossia suola della macchina vista per la parte che poggia a terra.*

- a*    Parte anteriore     $\left\{ \begin{array}{l} \text{della suola.} \\ \text{della suola.} \end{array} \right.$
- b*    Parte posteriore     $\left\{ \begin{array}{l} \text{della suola.} \\ \text{della suola.} \end{array} \right.$
- c*    Nodo di compasso che articola la parte anteriore , colla posteriore per formar la suola intiera.
- d*    Porzione della staffa *d* fig. I. e *a* fig. III. che è unita sodamente alla mezza suola dirimpetto al malleolo esterno.
- e*    Semi-cerchio d'ottone dentato fisso al lembo posteriore della mezza suola anteriore.
- f*    Molla , che colla sua estremità libera incontrandosi col semi-cerchio dentato , gradua il movimento ginglymoideo della parte mobile della suola.
- g*    Modo d'unione della colonnetta porta lamina semicircolare *c* fig. I. alla parte posteriore inferiore della suola.
- h*    Punto fisso dell'imbuto *d* fig. VI.
- iiii* Orlo marginale di pelle , a cui si connette la parte inferiore del coturno.

FIG. VIII.

*Piastra d'appoggio per l'avampiede recisa in un collo imbuto , affinchè si veda come il gambo di detta piastra venga ricevuto nell'imbuto stesso , e ritenutovi.*

- a*    Piastra d'acciajo imbottita per la parte che riguarda il piede.



- b* Gambo scorrevole della piastra.
- c* Imbuto, entro cui vi scorre il gambo della piastra.
- d* Vite di pressione, che attraversa la parete dell'imbuto, per assodar a piacimento il suddetto gambo.
- e* Prolungazione dell'imbuto per fissarsi nella suola (fig. VII *h*) mediante li chiodetti *ff*.

FIG. IX.

*Taglio perpendicolare dell'apparecchio, ossia coturno.*

- aa* Il coturno visto per la sua faccia interna.
- b* Sito ove l'imbottitura si rialza alquanto affine di lasciare inferiormente un seno longitudinale per ricevere il calcagno, e servire d'ostacolo al suo spostamento
- cc* Cuscinetto orizzontale, che copre la suola, e su cui appoggia il piede.

#### TAVOLA IV.

FIG. I.

*Coturno elastico, ossia apparecchio in sito per correggere il piede torto all'esterno.*

- aa* Parte superiore del coturno, che per la sua faccia è morbidamente imbottito.
- b* Ala a guisa di staffa, che si articola colla lamina perpendicolare esterna *c* in *d*.

*ee* Chiodetti in cui si annodano quattro coreggie fisse sulla lamina perpendicolare del lato opposto.

FIG. II.

*La stessa macchina vista dal lato opposto.*

*au* Parte superiore del coturno.

*b* Ala, o staffa, che colla lamina perpendicolare *c* si articola in *d*.

*e* Cuscinetto, o soprapiede, che si sottopone all'allacciatura del coturno.

*ffff* Quattro coreggie fisse nella lamina perpendicolare interna, che vanno ad annodarsi alli chiodetti *ee* fig. I.

*g* Nastro per allacciar il coturno.

FIG. III.

*Suola, ossia base dell'apparecchio vista di fronte.*

*a* Suola d'acciajo.

*bb* Prolungazioni laterali di detta suola a guisa di ale le quali ripiegate all'insù in ambi i lati formano le due staffe, ossia ale *bb* fig. I. e II. con cui si articola a nodo di compasso amendue le lamine perpendicolari.

*cccc* Orlo marginale di pelle, a cui si connette la parte inferiore del coturno.

## TAVOLA V.

FIG. 1.

*Coturno elastico , ossia apparecchio in sito per correggere il piede equino.*

*aa* Parte laterale esterna , e superiore del coturno.

*b* Staffa esterna.

*cc* Lamina perpendicolare esterna imbottita.

*d* Unione a guisa di compasso della lamina perpendicolare esterna colla parte superiore della staffa *b*.

• Molla spirale scoperta , fissa per l'estremo centrale nella lamina perpendicolare esterna.

*ff* Robuste fettucce di seta fisse ad ambe le estremità libere delle molle spirali.

*g* Esterna robusta fettuccia di seta, *porta-fibbia* che riceve una delle fettucce *ff*.

*h* Colonna d'acciaio che serve d'attacco alla robusta fettuccia di seta *ii*.

*jj* Due coreggie fisse nella lamina perpendicolare interna, le di cui estremità bucherate si annodano alli due bottoni *k* e servono ad affermare le due lamine perpendicolari alla gamba.

*lll* Orlo marginale di pelle , a cui si unisce la parte inferiore del coturno.

FIG. II.

*La stessa macchina veduta pel lato opposto, e non applicata.*

- aa* Parte laterale interna, e superiore del coturno.
- b* Staffa interna.
- cc* Lamina perpendicolare interna imbottita, che si unisce in *d* colla staffa *b*.
- e* Molla spirale nascosta fissa nella lamina perpendicolare interna.
- ff* Robuste fettuccie di seta fisse ad ambe le estremità libere delle molle spirali.
- g* Interna robusta fettuccia di seta *porta-fibbia* che riceve una delle fettuccie *ff*.
- h* Colonnella d'acciajo che serve d'attacco alla robusta fettuccia di seta *i i*.
- j* Cuscinetto, o soprapiede di morbida pelle fisso ad uno dei margini laterali anteriori, e superiori del coturno.
- k* Due coreggie bucherate fisse per la loro parte media alli due bottoni *i*, e che facendo il giro della gamba vanno ad annodarsi alli due bottoni fissi nella lamina perpendicolare del lato opposto, vedi *k* fig. I.
- m* Laccio per stringere il coturno.
- nnn* Orlo di pelle.

FIG. III.

*Suola d'acciajo, ossia base della stessa macchina vista per la parte che poggia a terra.*

- a* Mezza suola anteriore del coturno.

- b* Mezza suola posteriore, la quale allargata ai lati, in *cc*, e ripiegati li medesimi all' insù formano le staffe *b* fig. I. e II.
- d* Unione a nodo di compasso delle due mezze suole.
- e* Molla che gradua il movimento della semi-suola anteriore.
- f* Semi-cerchio d'ottone dentato fisso al lembo della semi-suola anteriore.
- g* Colonnella d'acciajo vista in intiero, col modo d'unione della medesima alla mezza suola posteriore, vedi *h* fig. I. e II.
- h* Fettuccia trasversale infissa alli margini laterali della mezza suola anteriore, la qual fettuccia prolungata ai lati serve a portar le fibbie *g* fig. I. e II.
- iiii* Orlo di pelle a cui si connette il margine inferiore del coturno.

## TAVOLA VI.

FIG. I.

*L' elastico apparecchio che vedesi applicato all' arto destro, serve per raddrizzare lo stinco della gamba incurvato internamente, in un col piede che declina alcun poco nel senso stesso. Quello che vedesi applicato al lato sinistro corregge la viziosa flessione della gambu sulla coscia anteriormente, ed il piede che si rivolge viziosamente all' esterno.*

*L' elastico apparecchio destro si compone come segue.*

- a* Coturno, il quale in questo caso sarà costrutto come

- quello del piede *equino*, eccettochè, quivi non si ha bisogno nè della colonnetta, nè della fettuccia di seta.
- bb* Due lamine surali una esterna, e l'altra interna, che dal prolungamento laterale della suola del coturno con cui sono articolate ascendono sino all'articolazione del ginocchio, ove si uniscono artatamente con altre due lamine corrispondenti denominate femorali *c c*, che dal precitato luogo si estendono sino alla metà della coscia.
- d* Arco rotulejo, il quale si unisce alle due lamine femorali, e le mantiene ognora parallele ed immobili.
- e* Piastra femorale, che si prolunga inferiormente in una corda bucherata, per unirsi alla lamina femorale esterna *c* col mezzo delli due punti *ff* sotto cui passa, e della vite *g*.
- h* Semi-cerchio iliaco, che circonda la metà circa del bacino, e si unisce con un altro corrispondente allorchando la viziatura è ad ambi i lati; come appunto viene in questa figura rappresentato. Inferiormente il semi-cerchio iliaco si prolunga in un pezzo che serve ad articolarsi coll'estremità superiore della piastra femorale *e*.
- ii* Piastra, ossia compressore surale, il di cui centro corrisponder deve alla somma convessità della viziatura della gamba.
- jj* Due viti con manubrio, le di cui madri viti sono nella spessezza della lamina surale esterna, e penetrando



Fig. I.

Fig. IV.

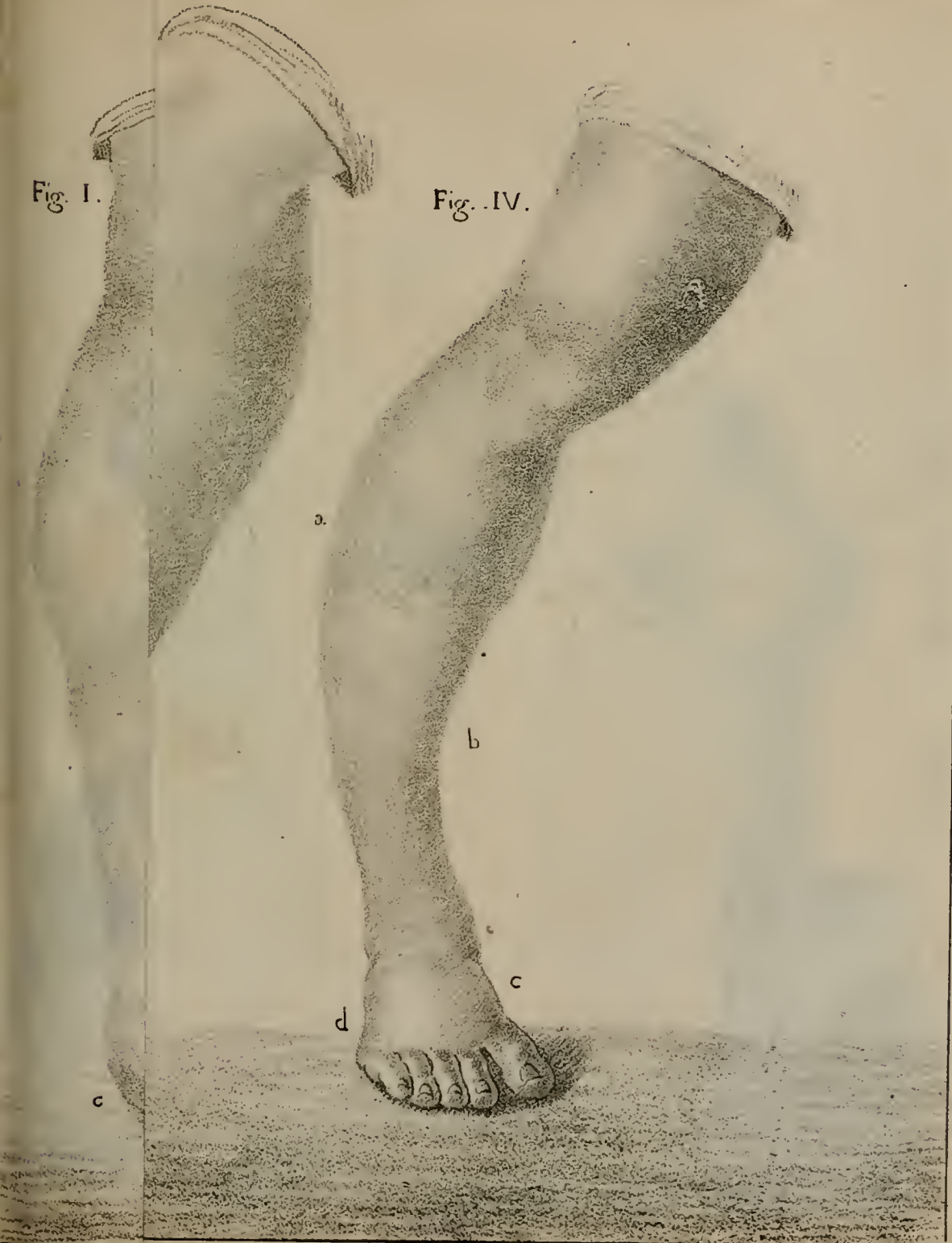
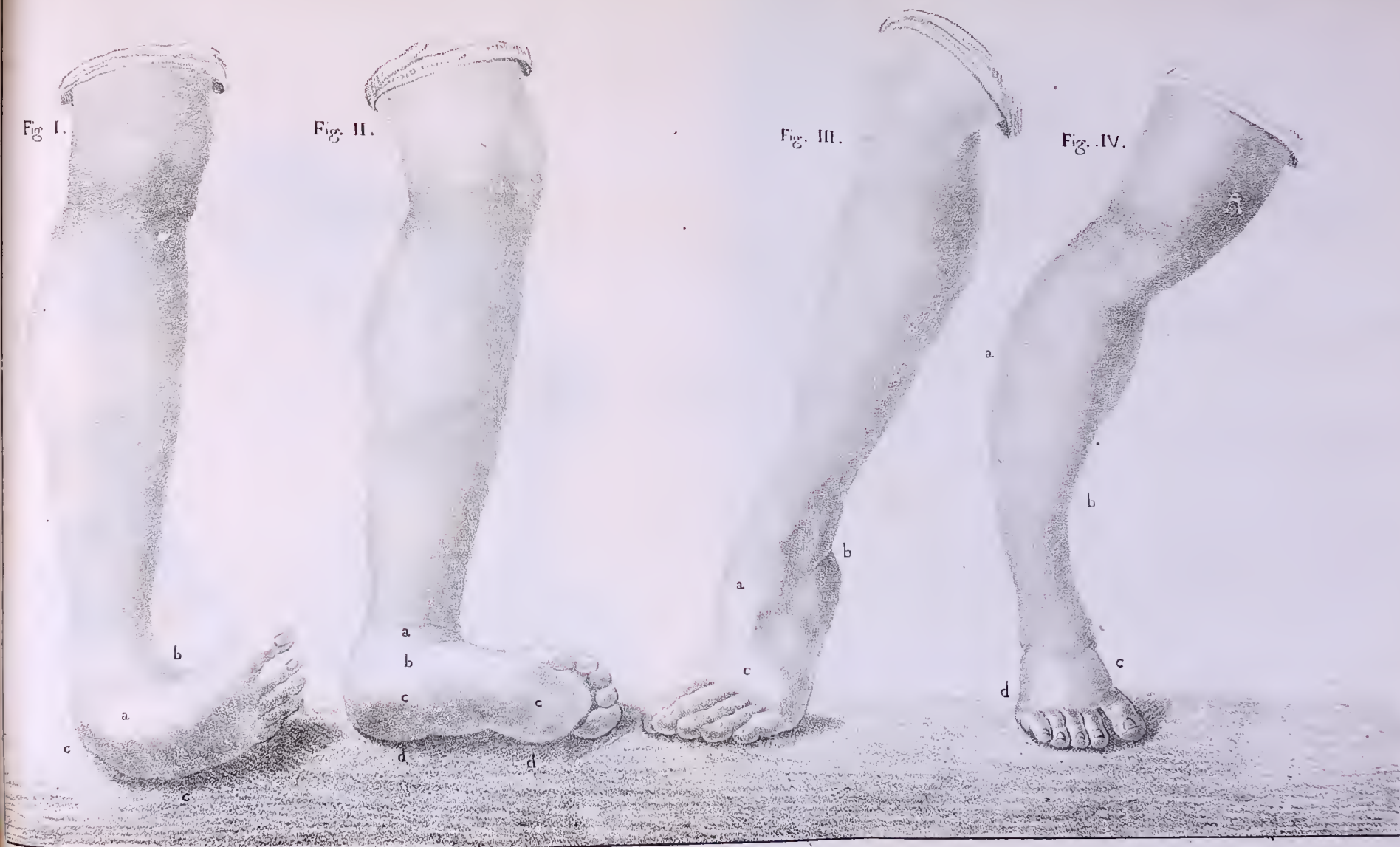


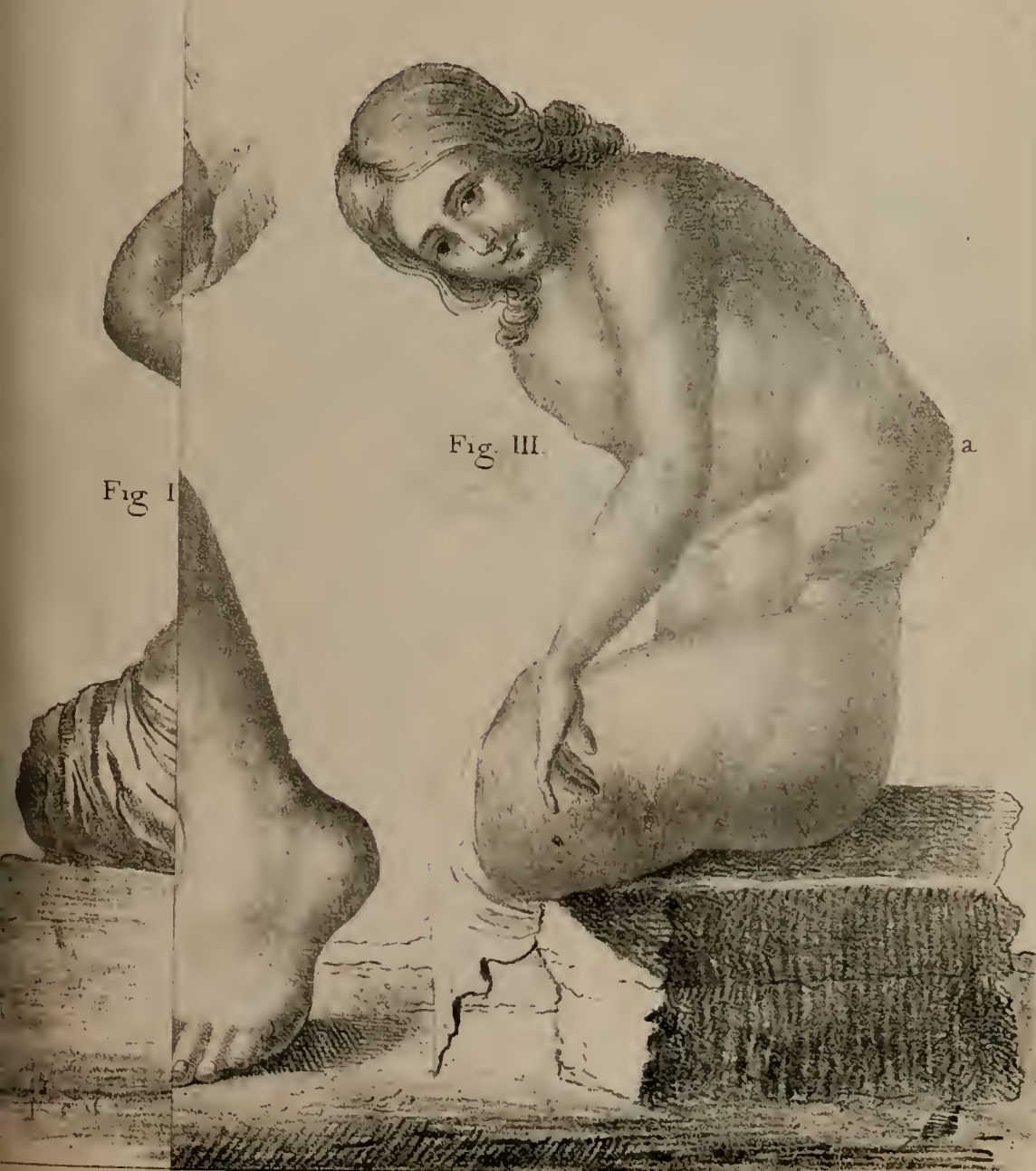
Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

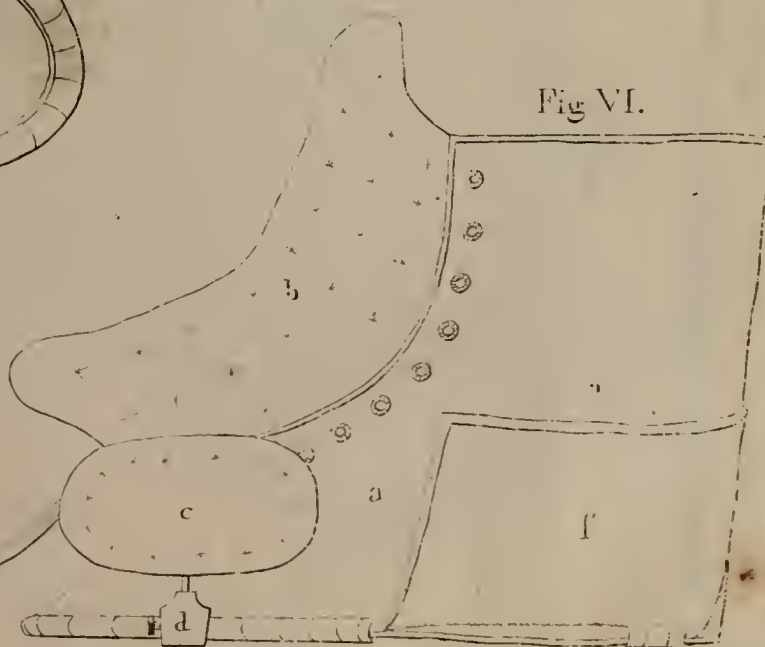
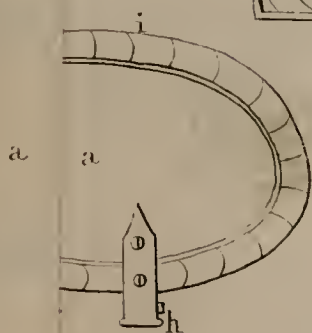
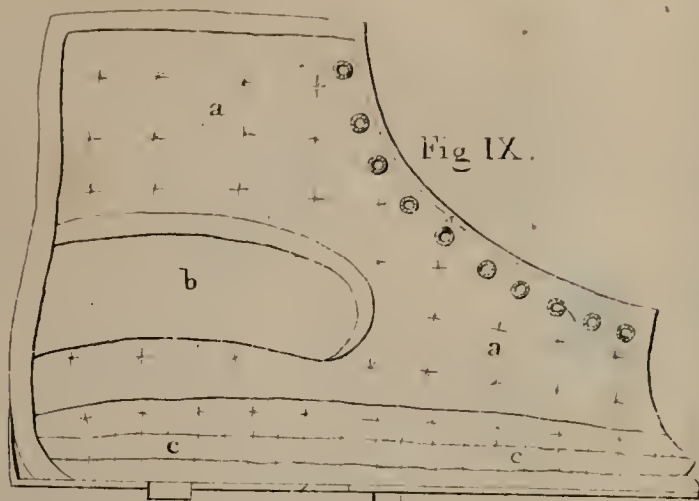
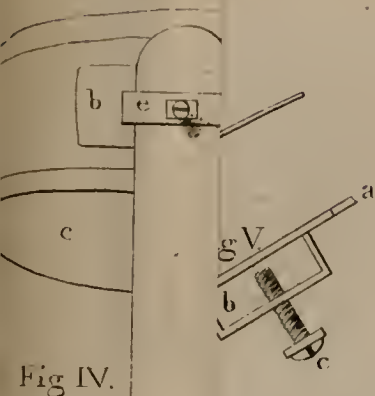
Fig. IV.











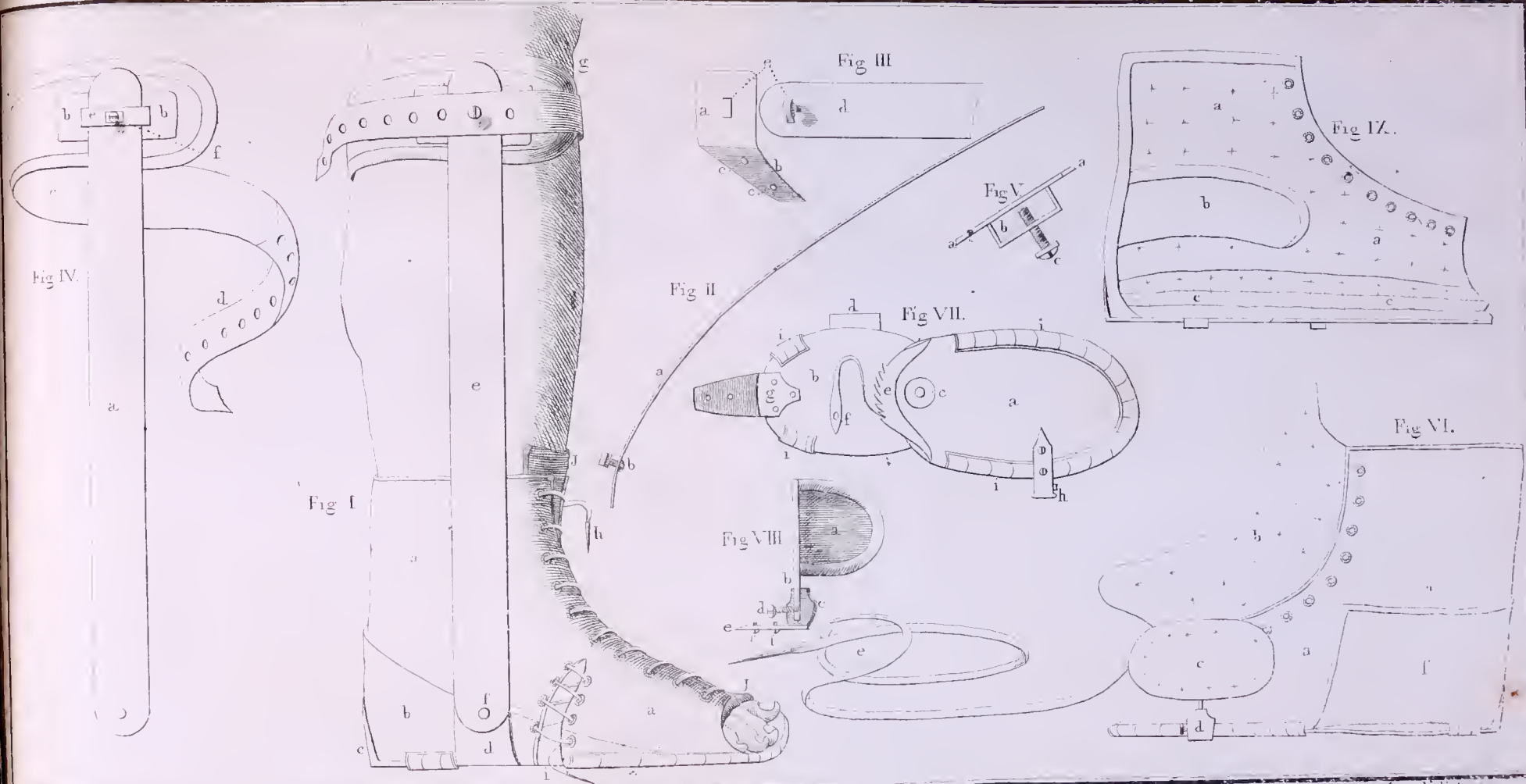




Fig I

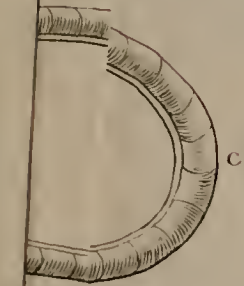


Fig II.

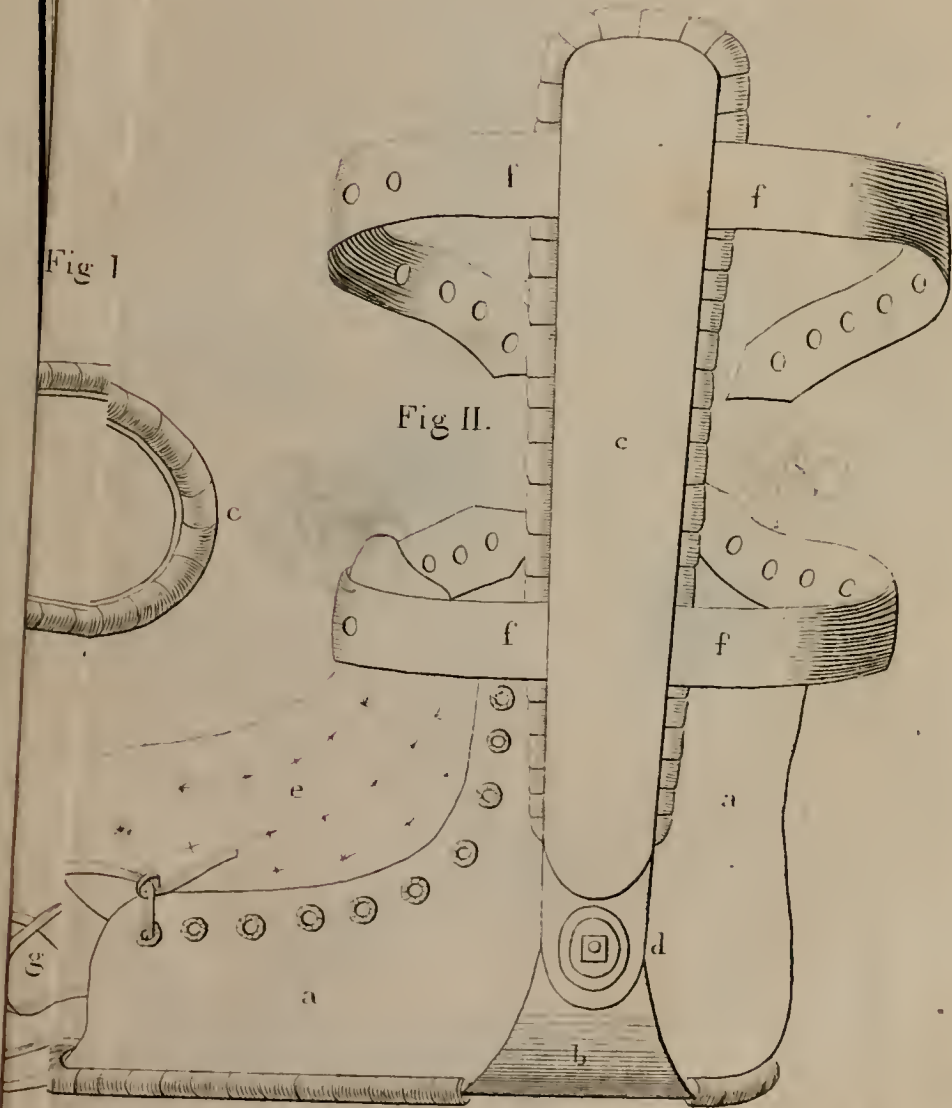


Fig I.

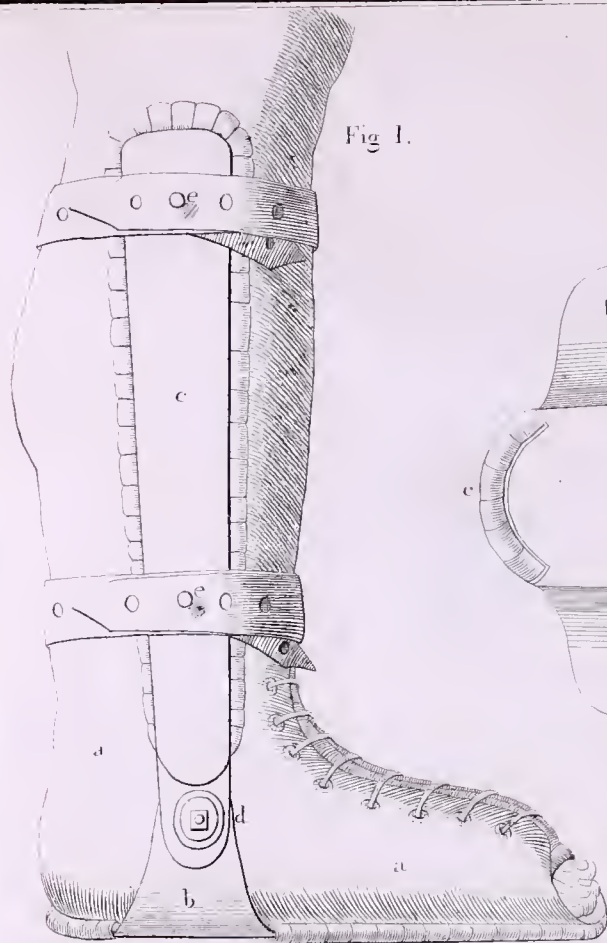


Fig III.

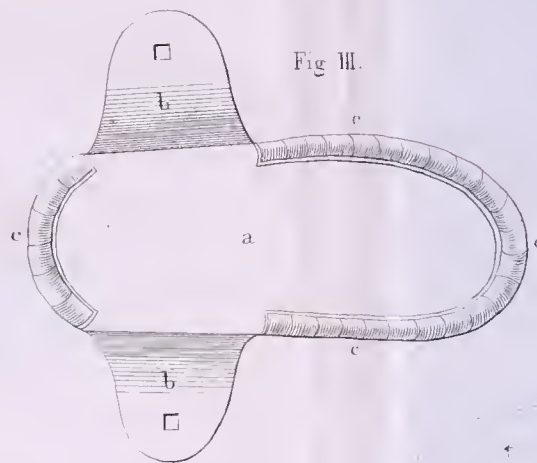


Fig II.

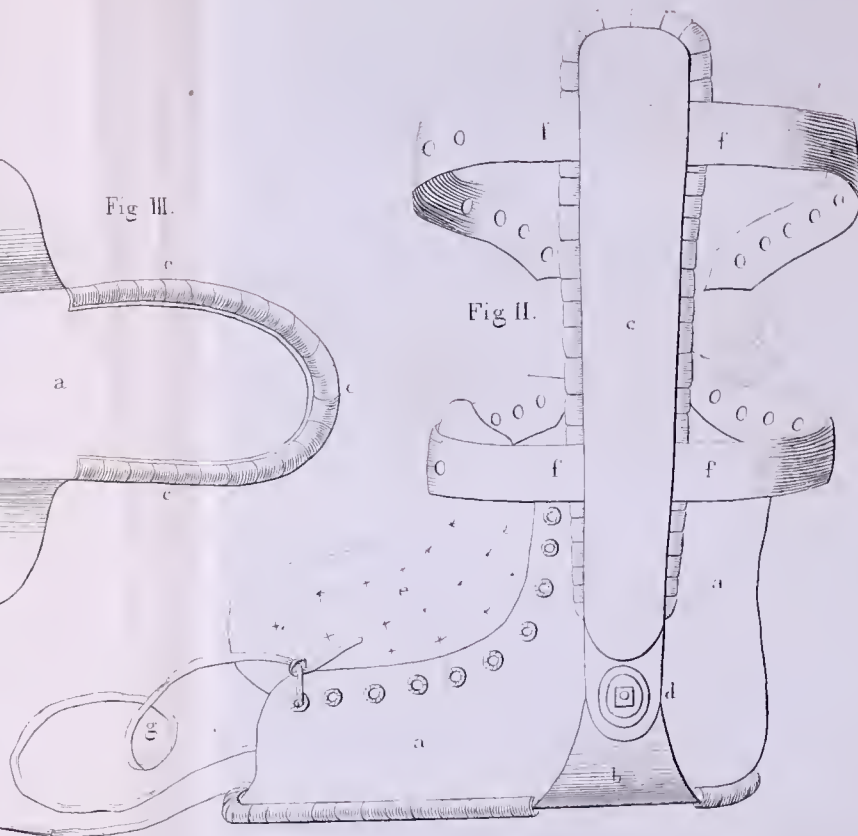




Fig. I.

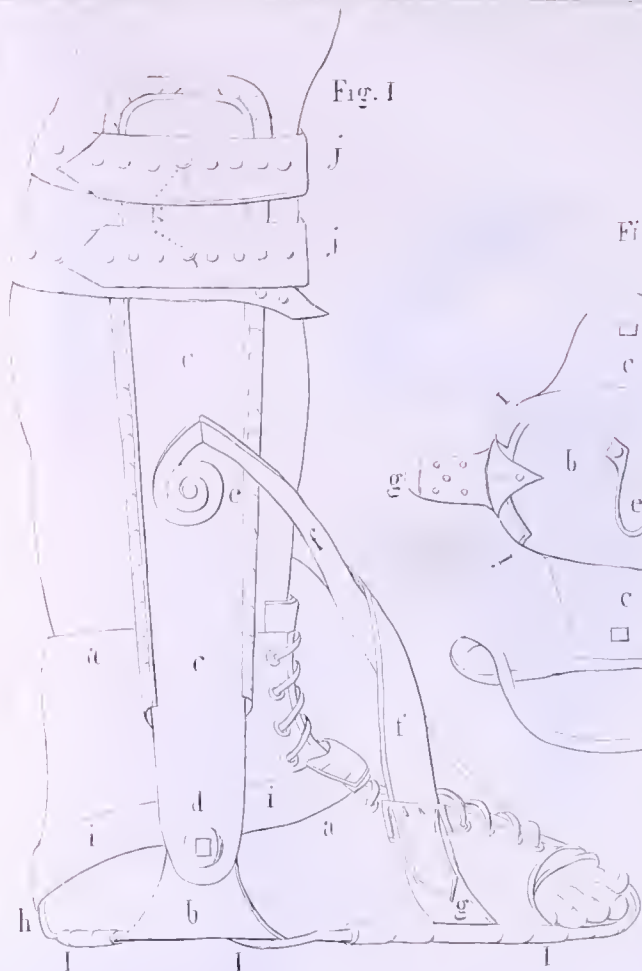


Fig. II.

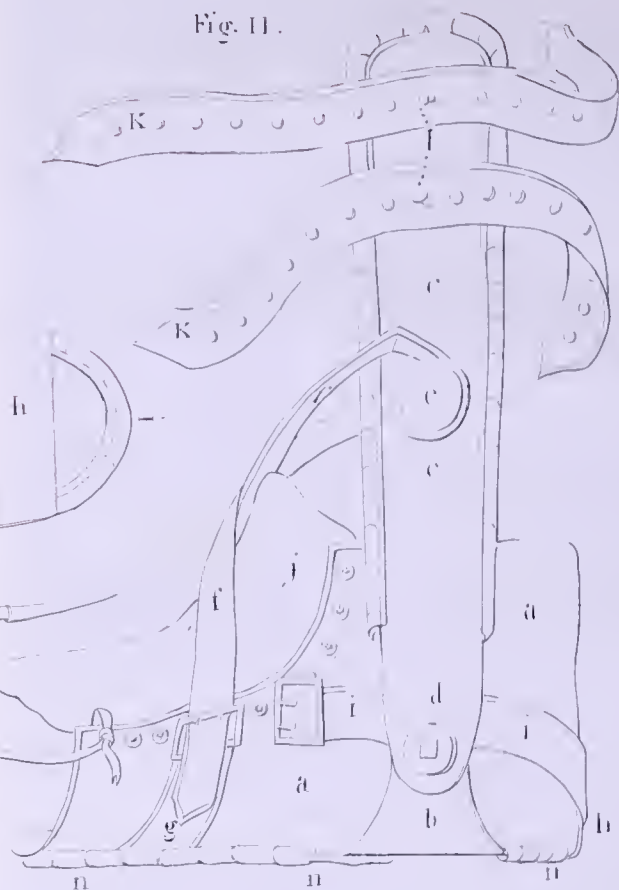


Fig. III.

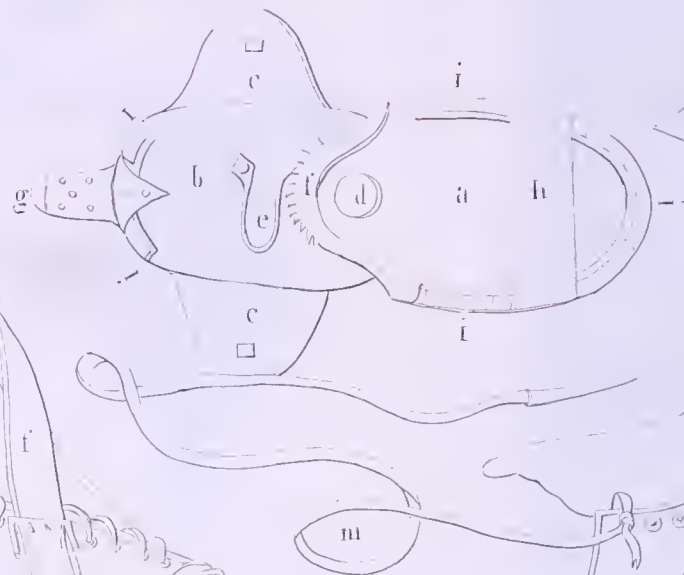


Fig.

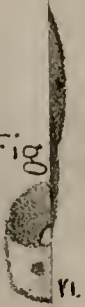


Fig. III.

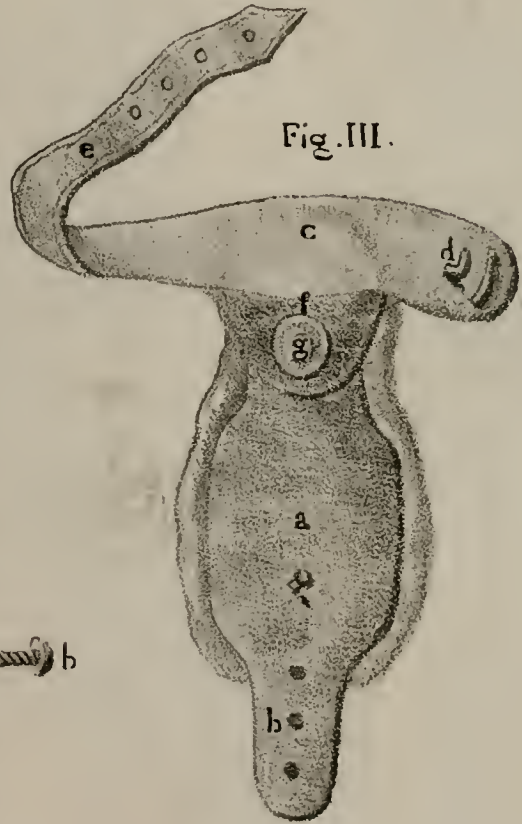


Fig. V.

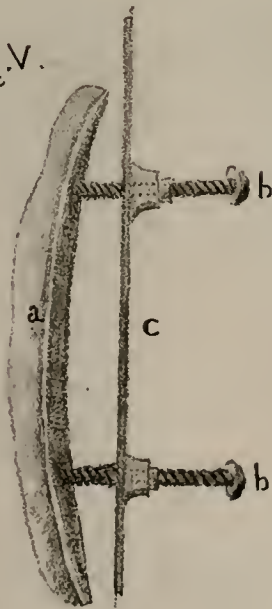




Fig. I.

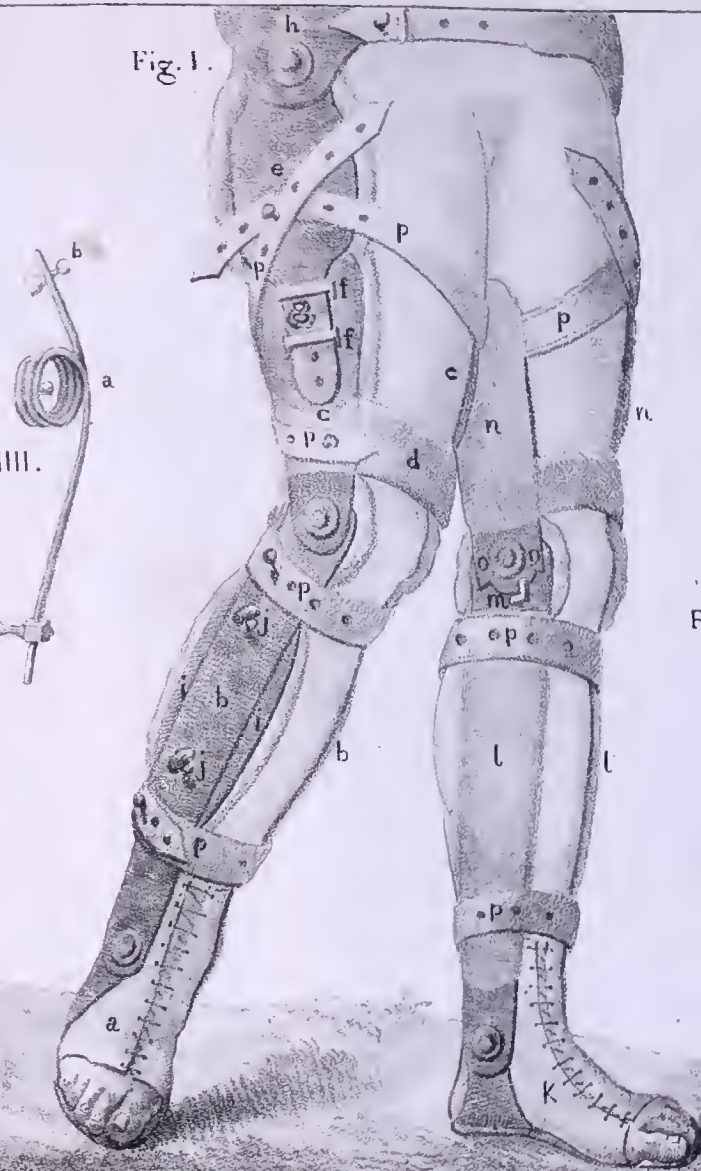


Fig. III.

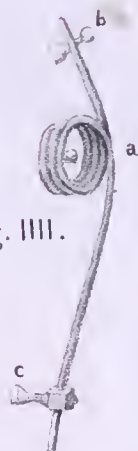


Fig. II.

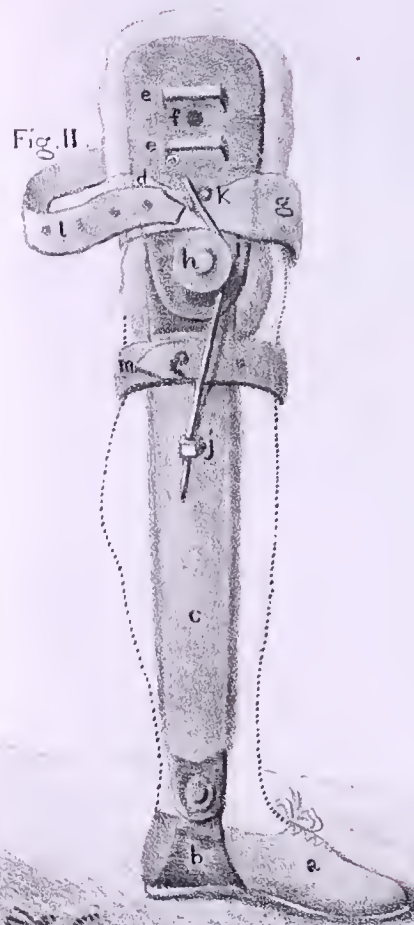


Fig. III.

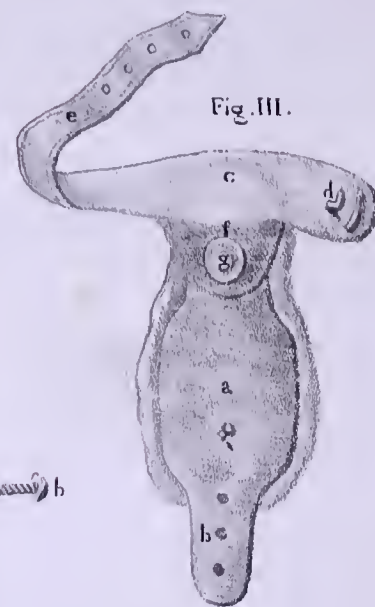
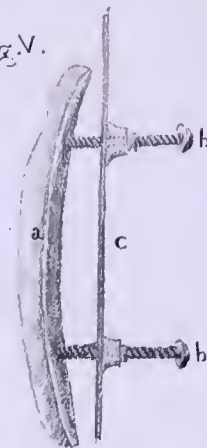
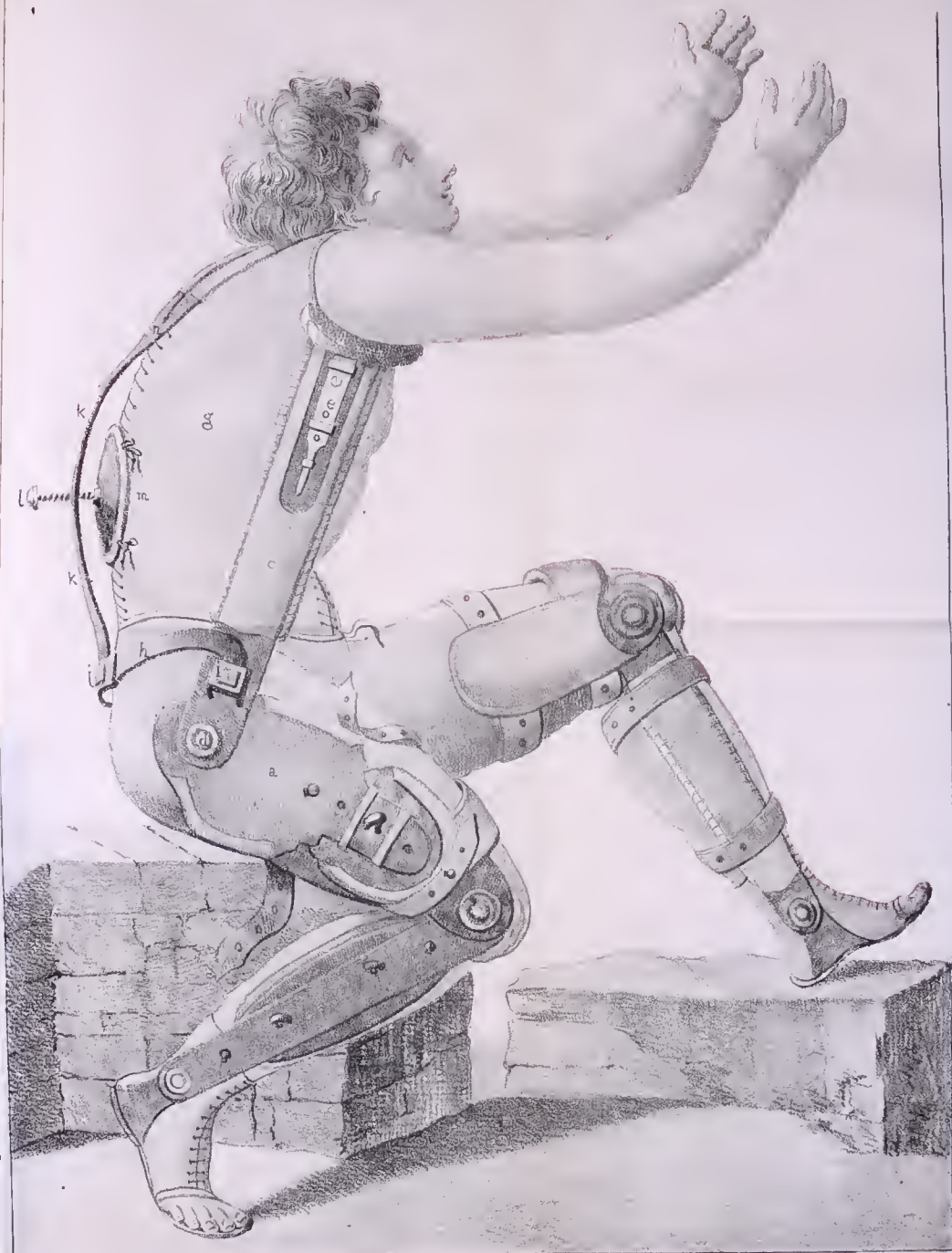


Fig. V.



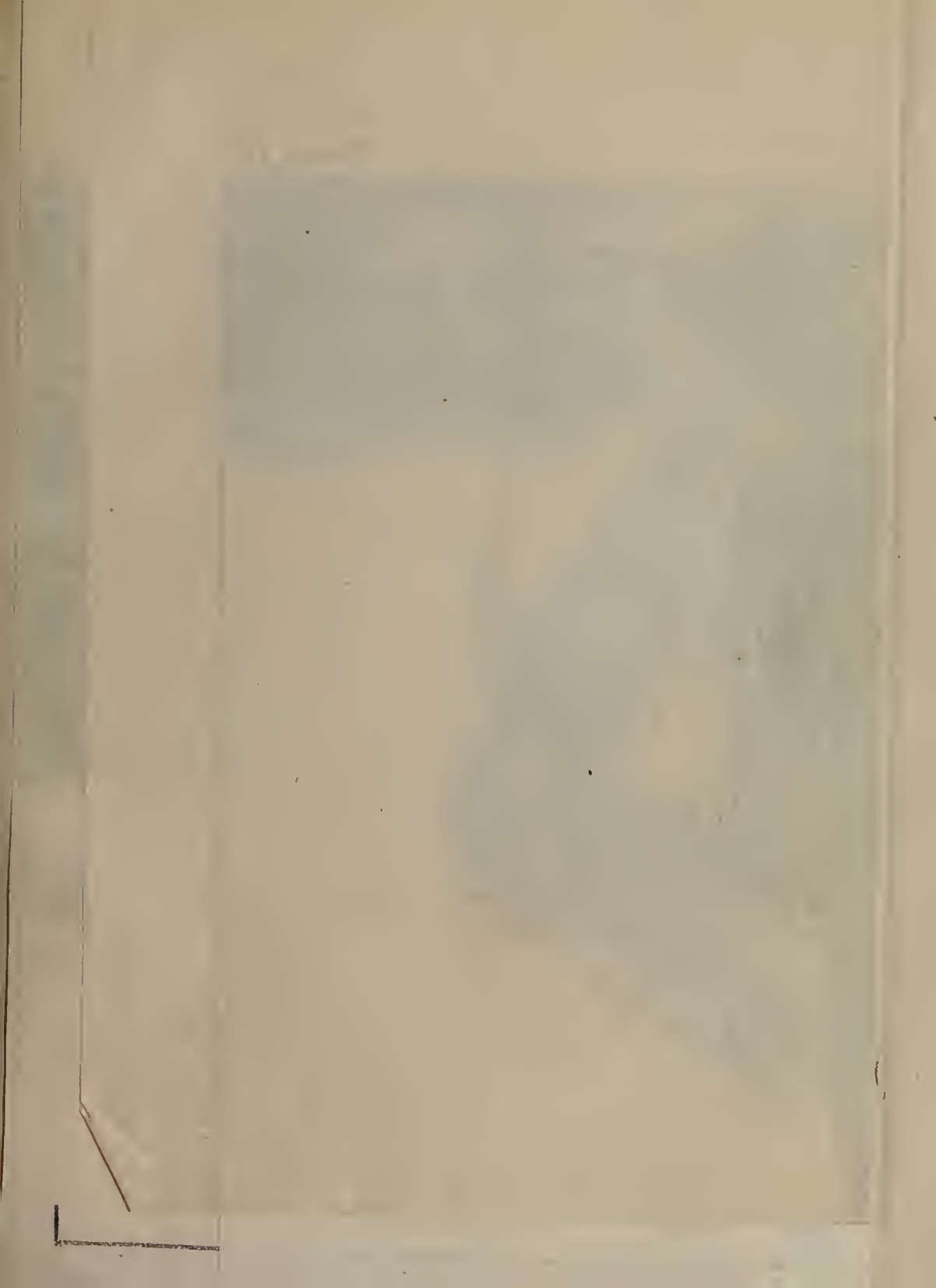














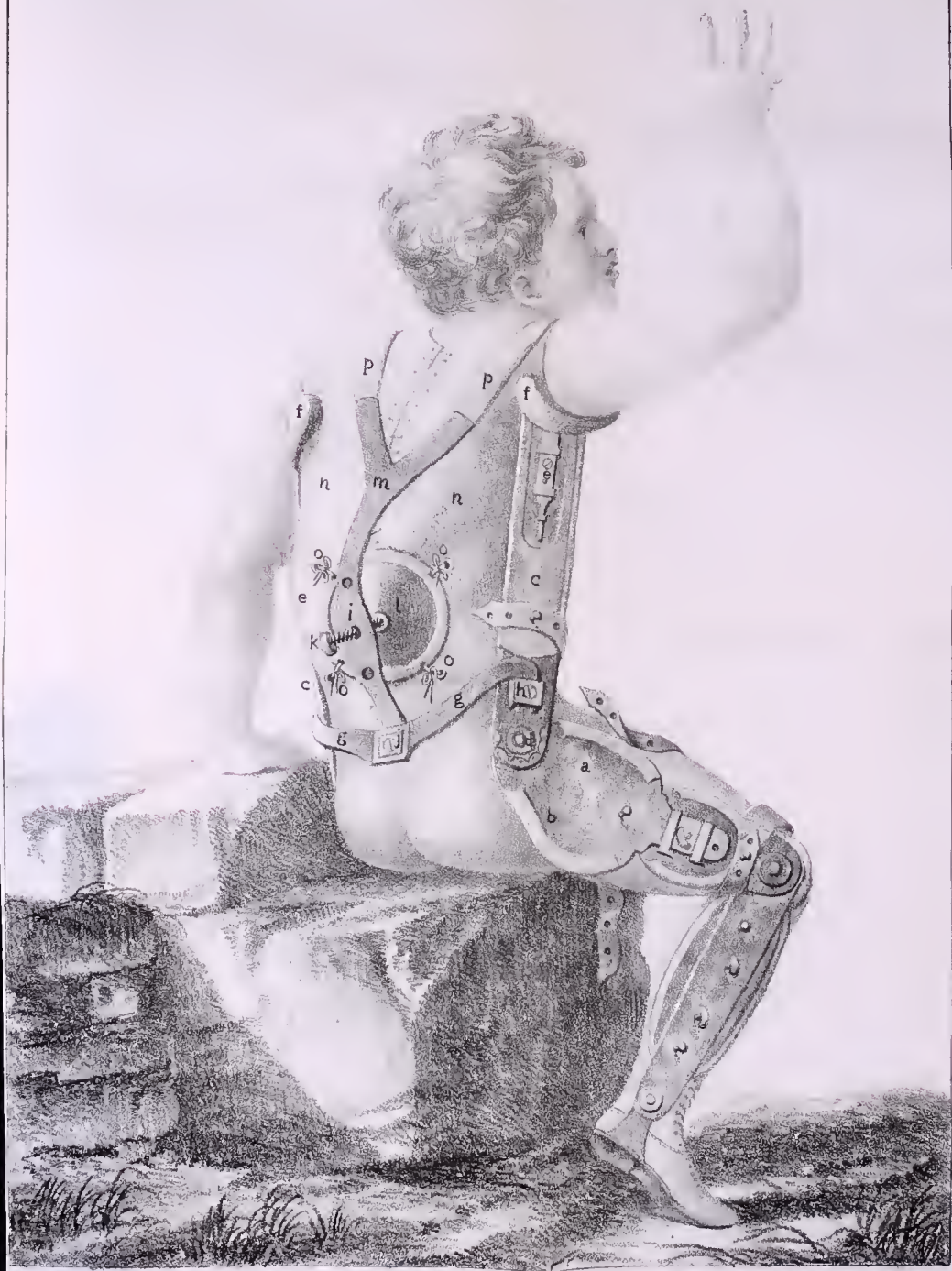


Fig. I.



Fig. I.

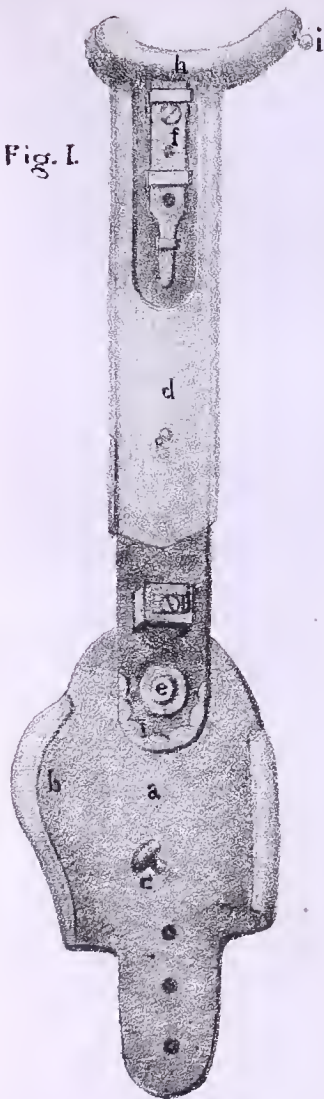


Fig. II.

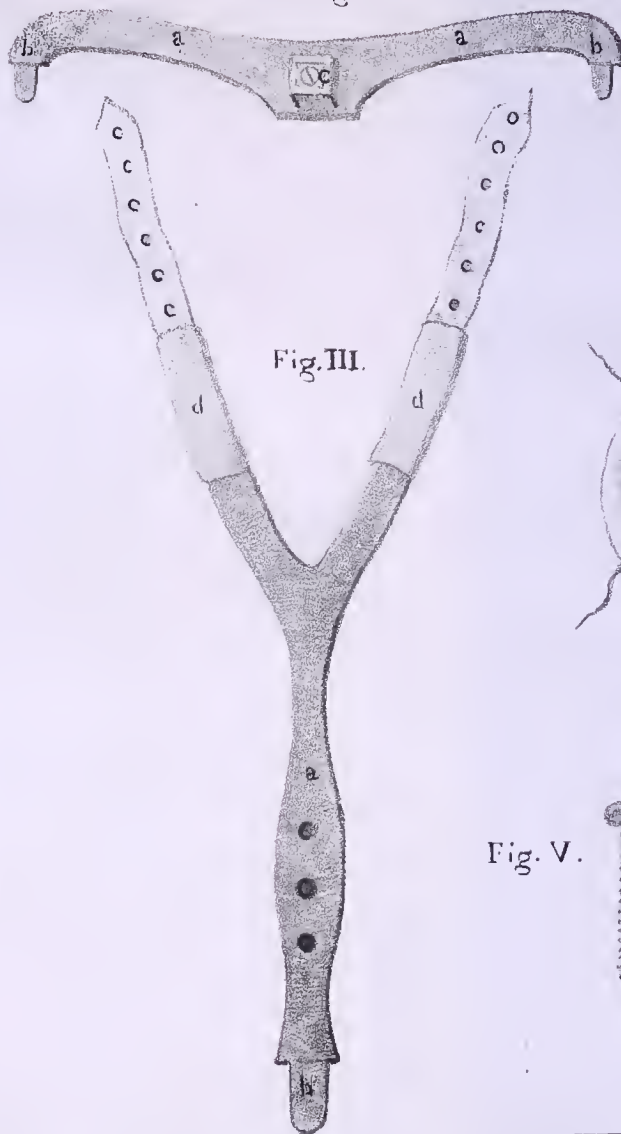


Fig. III.

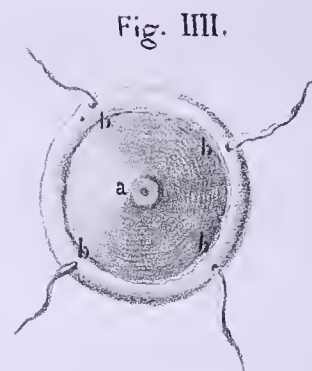


Fig. V.



tutta la sostanza della piastra *ii* restano ribadite alla faccia interna di essa, in modo però che possano girare, e portar in avanti od indietro la detta piastra, senza che esse vili possano scivolare, od uscire dal loro luogo.

Nell' elastico apparecchio sinistro il coturno *k* deve essere formato come appunto è quello, che per la torsione del piede all' esterno venne delineato nella tavola IV. Non vi si osserva in questo apparecchio alcuna piastra nella lamina surale esterna; solo vi si riscontra nella parte superiore di ambi le lamine surali *ll* una piccola colonnetta *m* in vicinanza dell' articolazione colle lamine femorali *nn* corrispondenti, le quali al sito ove incontransi con l'anzidetta colonnetta, essendo per alcun tratto mancante *oo* fa sì, che il movimento viene limitato alla sola flessione ed estensione naturale: del resto codesto apparecchio è del tutto simile a quello dell' arto destro.

*pppppp* Coreggie destinate per assodare tutto l'apparecchio.

FIG. II.

*Codesta figura rappresenta la parte esterna dell' apparato per correggere il raccorciamento dei muscoli flessori della gamba.*

*a* Scarpa comune.

TOM. XXVI.

C c

- b* Pezzo d'acciajo che attraversa tutta la region calcanea della scarpa, per ripiegarsi all'insù in due porzioni eguali, le quali si uniscono artatamente a due lamine surali, delle quali una è esterna, e visibile *c*, e l'altra invisibile, le quali si estendono sino al ginocchio, come appunto quelle testè descritte alla fig. I.
- d* Lamina femorale esterna.
- ee* Due ponti sotto cui passa la coda della piastra femorale da descriversi.
- f* Foro, ossia madre-vite.
- g* Arco rotulejo.
- h* Perno che articola le due lamine femorali, e surali esterne.
- i* Elastico estendente, il di cui corpo si aggira attorno al perno *h*, e delle due estremità, l'una passa nel foro della colonnetta *j* fissa nella lamina surale esterna, e l'altra batte di contro un robusto bottoncino *k*, il quale serve anche per dar attacco alla coreggia *l*.
- m* Coreggia che fa il giro d'attorno la gamba, al disopra delle lamine surali.



FIG. III.

*Si dimostra separatamente in questa figura la piastra femorale, unita al semi-cerchio iliaco, e disgiunta dalla lamina femorale esterna d fig. II., che per altro è la medesima denotata alla fig. I.*

- a* Piastra femorale.
- b* Coda della piastra, che passando sotto li due punti *e* e fig. II. si unisce col mezzo di una vite alla lamina femorale *d* di detta figura.
- c* Semi-cerchio iliaco, il quale da un lato termina in un gancio *d*, e dall' altro lato in una coreggia bucherata *e*.
- f* Porzione allungata del semi-cerchio iliaco.
- g* Unione snodata del semi-cerchio iliaco alla piastra femorale.

FIG. IV.

*Questa figura dimostra la forma dell' elastico estendente i fig. I.*

- a* Elastico estendente.
- b* Gancio, contro del quale batte l' estremità superiore del detto elastico.
- c* Colonnella, che superiormente è guernita d' un foro, entro cui vi passa l' estremità inferiore dell' elastico suddetto.

FIG. V.

*Si dimostra la piastra surale i i fig. I. vista di profilo.*

- a* Piastra, ossia compressore surale ben imbottito.

*bb* Viti di pressione con manubrio, che attraversando la spessore della lamina surale *c* portano avanti, od indietro la detta piastra surale.

## TAVOLA VII.

FIG. I.

*Grande apparecchio per correggere la viziosa incurvatura della spina, il quale è applicato ad un soggetto assiso, in cui soltanto vi si può osservare la parte superiore del lato destro.*

- a* Piastra femorale, che differisce soltanto da quella veduta nella tav. VI. fig. III. per l'essenziale aggrandimento *b* ad oggetto di presentare a tutto il tronco un appoggio allorquando il soggetto è assiso.
- c* Lamina sostenitrice.
- d* Unione snodata dalla lamina sostenitrice, colla suddetta piastra.
- e* Spranga, ossia pezzo scorrevole di acciaio denominato *porta-gruccia*.
- f* Gruccia.
- g* Corpetto su cui sono cucite, od allacciate le lamine sostenitrici.
- g* Porzione del semi-cerchio lombale.
- i* Pezzo d'acciajo scavato, e fisso nell'estremità inferiore della lamina sostenitrice *c*, entro cui si conficca una delle estremità incurvate del semi-cerchio lombale *h*

- j* Pezzo d'acciajo scavato, e fisso nel centro del semicerchio lombale, entro cui si conficca l'estremità inferiore della spranga vertebrale *k k*.
- l* Vite di pressione che oltrepassa la spessezza della detta spranga vertebrale, per portar avanti, od indietro la rotonda piastra *m*.
- n* Spartito della spranga vertebrale che dà attacco a due coreggie, le quali ascendendo sopra le spalle si attaccano una per parte ad un gancio fisso sull'estremità anteriore di ciascuna gruccia.

## TAVOLA VIII.

*Grande apparato applicato ad un soggetto; il quale è postato obbliquamente, ed in piedi, per dimostrare che non solo sedendo si può usare, ma ben anche passeggiando, o stando in piedi.*

*È da osservarsi in questa figura quanto segue.*

- a* Corpetto, sopra cui sono fisse le due lamine sostenitrici *b b*, mediante li debiti nastri *c c c c*.
- d* Coreggia che assoda anteriormente le due lamine sostenitrici.
- ee* Coreggie, che dallo spartito della spranga vertebrale (vedi tav. VII. *n*) si portano sopra le spalle per venirsi a fissare ciascuna ad un ginocchio corrispondente *ff* fisso all'estremità anteriore di ciascuna gruccia.

## TAVOLA IX.

*Grande apparecchio applicato ad un soggetto assiso in modo, che permette di poterne considerare posteriormente tutto il meccanismo della parte superiore.*

- a* Piastra femorale destra, che si unisce alla lamina femorale esterna dello stesso lato nella medesima guisa come si osserva nella tav. VI.
- b* Aggrandimento alla parte inferiore della piastra femorale.
- cc* Lamine sostenitrici.
- d* Unione snodata della lamina sostenitrice colla piastra femorale.
- e* Spranga scorrevole d'acciajo, ossia *porta-gruccia*.
- ff* Gruccie.
- gg* Semi-cerchio lombale.
- h* Pezzo d'acciajo scavato, fisso nella lamina sostenitrice, entro cui viene a conficcarsi una delle estremità; rivolte espressamente in basso del detto semi-cerchio lombale.
- j* Pezzo d'acciajo scavato, e fisso nel centro del semi-cerchio lombale, entro cui vi si conficca l'estremità inferiore della spranga vertebrale *i*.
- k* Vite che trapassa la spessezza della detta spranga vertebrale, per portar avanti, od indietro la piastra rotonda *L*.
- m* Spartito della spranga vertebrale, che termina in due coreggie bucherate, le quali vanno ad affibbiarsi anteriormente alle gruccie, passando sopra le spalle.

- nn* Corpetto a cui si attaccano le lamine sostenitrici.  
*oooo* Nastri per assodare al corpetto la piastra rotonda.  
*pp* Coreggie che dallo spartito della spranga vertebrale passano sopra le spalle, e vanno ciascuna ad infiggersi alla parte anteriore delle gruccie.

## TAVOLA X.

*In questa tavola si osservano tutti li pezzi separati, che compongono la parte superiore del grande apparato.*

FIG. I.

- a* Piastra femorale.  
*b* Necessario aggrandimento della suddetta.  
*c* Bottoncino che serve ad attaccare due coreggie.  
*d* Lamina sostenitrice.  
*e* Nodo movibile, che unisce la lamina sostenitrice colla piastra femorale.  
*f* Spranga *porta-gruccia*.  
*h* Gruccia, che all'estremità anteriore porta un bottoncino *i*.  
*i* Pezzo d'acciajo scavato, entro cui vi scorre una delle estremità del semi-cerchio lombale.

FIG. II.

- a* Semi-cerchio lombale, che termina in due estremità frastagliate *bb* che servono a conficcarsi ciascuna nella scavatura del pezzo corrispondente d'acciajo.  
*e* Pezzo d'acciajo scavato, entro cui si conficca l'estremità della spranga vertebrale.



FIG. III.

- a* Spranga vertebrale, la quale verso la metà circa di sua lunghezza è bucherata, per dar passaggio vi-  
cendevole secondo l' uopo alla vite di pressione da descriversi.
- b* Estremità inferiore della detta spranga, la quale è per alcun tratto mancante ad oggetto di potersi libera-  
mente conficcare nella scavatura *c* fig. II. ed ivi as-  
sodarsi.
- dd* Coreggie, che hanno origine dalle braccia dello spar-  
tito della spranga.

FIG. IV.

- a* Piastra rotonda, nel di cui centro havvi un foro.
- bbbb* Nastri che assodano al corpetto la detta piastra ro-  
tonda, mediante li nastri corrispondenti del corpo  
stesso, vedi *o o o o* tav. IX.

FIG. V.

- a* Vite di pressione, che termina in una estremità aguz-  
zata *b* per penetrare nel foro della piastra rotonda,  
ed ivi girare.
- Fine della spiegazione delle tavole.

## MÉMOIRE

## SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES

PAR M. LE CHEVALIER CISA DE GRESY.

*Lu à la séance du 20 mai 1821.*

Les intégrales définies, celles que M. LE-GENDRE désigne par le nom d'intégrales, ou fonctions Euleriennes de première, et seconde espèce forment d'après ce savant auteur la théorie la plus complète que l'on connoisse jusqu'à-présent sur les intégrales définies. ( Exercice de calcul intégral Tom. 1 pag 221 ).

Les intégrales de la première espèce se développent aisément en un produit d'un nombre infini de facteurs par leur comparaison à d'autres intégrales déjà connues. ( LA-CROIX Tom. 3 pag. 437 ). À l'égard de celles de la seconde espèce, on sait que lorsque l'exposant, qui les distingue l'une de l'autre, est un nombre entier, l'intégrale est égale au produit de tous les nombres entiers contenus dans cet exposant ; cependant cette notion fort-claire de l'intégrale, lorsque l'exposant est un nombre entier, ne présente plus aucun sens dans le cas où il seroit une fraction, ou bien un nombre irrationnel. ( Exercices Tom. 3 pag. 5 ).

TOM. XXVI.

D d

J'ai eu occasion de remarquer que les belles formules données par LA-GRANGE dans la 4.<sup>e</sup> leçon sur les calculs des fonctions, pour exprimer les logarithmes, en les regardant comme des racines d'ordre infinitième, pouvoient s'appliquer avec avantage à l'intégration des fonctions Euleriennes de la seconde espèce; par ce moyen elles se ramènent comme celle de la première à un produit d'un nombre infini de facteurs. Afin de donner plus d'étendue à cette analyse je ne me suis pas borné à l'application de ces formules aux seules fonctions Euleriennes de la seconde espèce, mais j'ai cherché à embrasser en même tems plusieurs autres fonctions qui dépendent de celles-là plus, ou moins directement.

Je divise ce mémoire en deux parties; dans la première je cherche d'abord les intégrales Euleriennes de la première espèce en produit d'un nombre infini de facteurs mais d'une manière directe, indépendamment d'aucune intégrale déjà connue; je fais ensuite l'application des formules de LA-GRANGE aux fonctions de la seconde espèce et à plusieurs autres fonctions logarithmiques les plus connues.

Dans la seconde partie j'applique encore les mêmes formules à différentes fonctions exponentielles, et circulaires les plus remarquables; le dernier genre de fonctions m'ayant conduit à faire quelques remarques sur la méthode d'intégration fondée sur le passage du réel à l'imaginaire, j'espère qu'elles pourront être de quelque utilité pour éclaircir toujours d'avantage cette partie assez difficile du calcul intégral.

## I.

*Des intégrales définies algébriques et logarithmiques.*

1. Les intégrales Euleriennes se distinguent en deux espèces, celles de la première sont représentées par la formule  $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$  prise entre  $x=0$  et  $x=1$ ; celle de la seconde par la formule  $\int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^{q-1}$  prise entre les mêmes limites; en affectant le signe intégral de l'indication des limites on pourra les écrire plus simplement;

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}, \quad \int_0^1 dx (\log \frac{1}{x})^{q-1}.$$

En considérant d'abord la première formule on voit qu'on peut lui donner une forme plus simple; en effet si on pose  $x^n=y$ , on la changera en  $\frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1} dy (1-y)^{\frac{q}{n}-1}$ , donc si on fait abstraction du coefficient  $\frac{1}{n}$ , et qu'on change  $\frac{p}{n}$ ,  $\frac{q}{n}$  et  $y$  en  $p$ ,  $q$  et  $x$ , elle prendra la forme

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1};$$

(exercices du calcul intégral de M. LE-GENDRE Tom. 2 pag. 3).

2. EULER et après lui le savant auteur que je viens de citer, qui a porté cette théorie à un très-haut degré de perfection, nous ont donné plusieurs beaux théorèmes

propres à faire connoître les propriétés les plus importantes de ces fonctions, suivant les différentes valeurs que l'on peut attribuer successivement aux exposans.

Lorsqu'on considère la première fonction indépendamment d'aucune valeur particulière des quantités  $p$ ,  $q$ , l'intégrale se présente sous la forme d'un produit d'un nombre infini de facteurs, mais ce nombre de facteurs devient fini toutes les fois que  $p$  ou  $q$ , l'une de ces deux quantités est censée un nombre entier; c'est ainsi par exemple que dans la supposition de  $q$  nombre entier on a

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{3}{p+3} \cdots \frac{q-1}{p+q-1}.$$

3. Maintenant soient  $p$  et  $q$  des nombres quelconques on aura par les formules connues (V. LA-CROIX T. 3 p. 46);

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{(1-x)^q}{p} \left\{ \begin{aligned} & x^p + \frac{(q+p)}{(p+1)} x^{p+1} + \frac{(q+p)(q+p+1)}{(p+1)(p+2)} x^{p+2} \\ & + \frac{(q+p)(q+p+1)(q+p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} x^{p+3} \\ & + \dots \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{(q+p)(q+p+1)(q+p+2) \dots (q+p+r)}{p (p+1) (p+2) \dots (p+r)} \int_0^1 x^{p+r} dx (1-x)^{q-1}$$

la partie de cette intégrale indépendante du signe d'intégration disparoit en général entre les limites  $x=0$ ,  $x=1$ , excepté dans le cas de  $q \leq 0$ ; car si  $q = 0$  on aura  $(1-x)^q = 1$  quelque soit  $x$ , et si  $q < 0$  alors à la limite  $x=1$  on a  $(1-x)^q = \infty$ ; faisant donc, en général, abstraction de cette partie, et posant pour plus de simplicité



$$\frac{q+p}{p} \cdot \frac{q+p+1}{p+1} \cdot \frac{q+p+2}{p+2} \dots \frac{q+p+r}{p+r} = N$$

on aura ;

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = N \int_0^1 x^{p+r} dx (1-x)^{q-1}.$$

4. Comme la quantité  $r$  peut être un nombre quelconque entier, je puis supposer  $r = \infty$ , par là l'équation précédente se change en

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = N \int_0^1 x^r dx (1-x)^{q-1}.$$

Maintenant si on considère plus généralement l'expression  $\int x^r dx (ax-b)^k$ , on a par les formules connues, en ayant soin d'écrire la série suivant les puissances ascendantes de  $x$  ;

$$\int x^r dx (ax-b)^k = \frac{(ax-b)^{k+1}}{a(k+r+1)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2b}{a(k+2)} \cdot \frac{3b}{a(k+3)} \dots \frac{rb}{a(k+r)} \cdot x \\ & + \frac{3b}{a(k+3)} \cdot \frac{4b}{a(k+4)} \dots \frac{rb}{a(k+r)} x^2 \\ & + \dots \text{etc.} + \frac{rb}{a(k+r)} x^{r-1} + x^r \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{b}{a(k+2)} \cdot \frac{2b}{a(k+3)} \cdot \frac{3b}{a(k+4)} \dots \frac{rb}{a(k+r+1)} \int dx (ax-b)^k.$$

Je fais pour abréger

$$\frac{b}{a(k+2)} \cdot \frac{2b}{a(k+3)} \cdot \frac{3b}{a(k+4)} \dots \frac{rb}{a(k+r+1)} = M$$

ce qui change l'équation précédente en

$$\int x^r dx (ax-b)^k = \frac{M(ax-b)^{k+1}}{b} \left\{ \begin{aligned} & x + \frac{a(k+2)}{2b} x^2 \\ & + \frac{a(k+2)}{2b} \cdot \frac{a(k+3)}{3b} x^3 + \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

$$+ M \int dx (ax-b)^k$$

dans le cas actuel il faudra faire  $a = -1$ ,  $b = -1$ ,  $k = q - 1$ , partant

$$M = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r},$$

et de là

$$\int x^r dx (1-x)^{q-1} = -M(1-x)^q \left\{ x + \frac{q+1}{2} x^2 + \frac{q+1 \cdot q+2}{2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.} \right\} \\ - M \frac{(1-x)^q}{q}$$

cette valeur devant être prise entre  $x=0$ ,  $x=1$  se réduira au seul terme  $\frac{M}{q}$ , tant qu'on y suppose  $q > 0$ , donc dans cette supposition et entre les mêmes limites il vient

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{NM}{q}$$

ou bien posant pour  $N$  et  $M$  leurs valeurs,

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{q} \left\{ \frac{q+p}{p} \cdot \frac{q+p+1}{p+1} \cdots \frac{q+p+r}{p+r} \right\} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdots \frac{r}{q+r} \right\}$$

cette équation peut encore s'écrire plus simplement

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{q+p}{pq} \left\{ \frac{q+p+1}{(p+1)(q+1)} \cdot \frac{2(p+q+2)}{(p+2)(q+2)} \cdots \frac{r(q+p+r)}{(p+r)(q+r)} \right\} (a)$$

5. Telle sera l'intégrale cherchée pour des valeurs quelconques de  $p$  et  $q$ , entiers, ou fractionnaires; supposons  $q = 2$  on aura

$$N = \frac{p+2}{p} \cdot \frac{p+3}{p+1} \cdot \frac{p+4}{p+2} \cdots \frac{p+r}{p+r-2}$$

et regardant d'abord le nombre entier  $r$  comme s'il étoit fini, il est clair qu'en reculant tous les denominateurs vers la gauche de deux rangs on pourra écrire

$$N = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \left\{ \frac{p+2}{p+2} \cdot \frac{p+3}{p+3} \dots \frac{p+r-2}{p+r-2} \right\} \frac{p+r-1}{1} \frac{p+r}{1}$$

c'est-à-dire  $N = \frac{p+r-1}{p} \cdot \frac{p+r}{p+1}$

on aura de même

$$M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \dots \frac{r}{r+2},$$

et en réculant vers la gauche tous les numérateurs de deux rangs ;

$$M = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \left\{ \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \dots \frac{r}{r} \right\} \frac{1}{r+1} \cdot \frac{1}{r+2}$$

ou bien

$$M = \frac{1}{r+1} \frac{2}{r+2} ;$$

donc  $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+r-1}{p} \cdot \frac{p+r}{p+1} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{2}{r+2},$

ou enfin à cause que  $r = \infty$

on aura  $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x) = \frac{1}{p \cdot p+1}$

comme on l'auroit trouvé directement.

Si on veut supposer que  $q$  est un nombre entier quelconque, on mettra d'abord l'équation générale sous la forme

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{p+q}{q} \cdot \frac{p+q+1}{q+2} \dots \frac{p+q+r}{q+r} \right\} \left\{ \frac{1}{p+1} \frac{2}{p+2} \dots \frac{r}{p+r} \right\} ;$$

or à cause que  $q$  est supposé un nombre entier, il sera nécessairement compris dans la suite 1. 2. 3... $r$ . d'où il suit qu'on pourra écrire

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{p+q}{q} \cdot \frac{p+q+1}{q+1} \dots \frac{p+r}{r} \cdot \frac{p+r+1}{r+1} \dots \frac{p+r+q}{r+q} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{3}{p+3} \dots \frac{q-1}{p+q-1} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot \frac{q+1}{p+q+1} \dots \frac{r}{p+r} \right\},$$

et à cause de  $r = \infty$  on a

$$\frac{p+r+1}{r+1} \cdot \frac{p+r+2}{r+2} \dots \frac{p+r+q}{r+q} = 1$$

donc, réduisant les autres facteurs, il viendra simplement

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{3}{p+3} \dots \frac{q-1}{p+q-1}$$

comme on l'a remarqué au n.<sup>o</sup> 2.

6. Au moyen de l'équation (a) il sera facile de vérifier les différens théorèmes sur lesquels est fondée toute la théorie de ces fonctions Euleriennes. D'abord il est évident, que si dans cette équation on change  $p$  en  $q$  et réciproquement, la valeur du second membre se conservera identiquement la même, d'où l'on conclura

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{p-1} \quad (1)$$

De cette même équation (a) en changeant  $p$  en  $p+q$ , et  $q$  en  $m$ , on déduit

$$\int_0^1 x^{p+q-1} dx (1-x)^{m-1} = \frac{p+q+m}{m(p+q)} \left\{ \frac{p+q+m+1}{(p+q+1)(m+1)} \cdot \frac{2(p+q+m+2)}{(p+q+2)(m+2)} \right. \\ \left. \dots \frac{r(p+q+m+r)}{(p+q+r)(m+r)} \right\}$$

cette équation étant multipliée par celle (a) on trouve

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \cdot \int_0^1 x^{p+q-1} dx (1-x)^{m-1} \\ = \frac{p+q+m}{pqm} \left\{ \frac{p+q+m+1}{(p+1)(q+1)(m+1)} \cdot \frac{2(p+q+m+2)}{(p+2)(q+2)(m+2)} \dots \frac{r(p+q+m+r)}{(p+r)(q+r)(m+r)} \right\};$$

or de quelque manière qu'on permute entr'elles les quantités  $p, q, m$  le second membre conserve toujours la même valeur d'où il suit que les six expressions

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \int_0^1 x^{p+q-1} dx (1-x)^{m-1} \\ & \int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{p-1} \int_0^1 x^{p+q-1} dx (1-x)^{m-1} \\ & \int_0^1 x^{m-1} dx (1-x)^{p-1} \int_0^1 x^{m+q-1} dx (1-x)^{p-1} \\ & \int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{m-1} \int_0^1 x^{m+q-1} dx (1-x)^{p-1} \\ & \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{m-1} \int_0^1 x^{p+m-1} dx (1-x)^{q-1} \\ & \int_0^1 x^{m-1} dx (1-x)^{p-1} \int_0^1 x^{p+m-1} dx (1-x)^{q-1} \end{aligned} \right\} \quad (2),$$

sont équivalentes. (Exercices T. 2 p. 7-8).

Si dans l'équation (a) on change encore  $p$  en  $p-1$  on aura:

$$\int_0^1 x^{p-2} dx (1-x)^{q-1} = \frac{p+q-1}{q(p-1)} \left\{ \frac{p+q}{p(q+1)} \cdot \frac{2(p+q+1)}{(p+1)(q+2)} \cdots \frac{r(p+q+r-1)}{(p+r-1)(q+r)} \right\};$$

ce qui revient à

$$\int_0^1 x^{p-2} dx (1-x)^{q-1} = \frac{p+q-1}{p-1} \left\{ \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{p+q+1}{(q+1)(p+1)} \cdot \frac{2(p+q+2)}{(q+2)(p+2)} \cdots \frac{r(p+q+r)}{(q+r)(p+r)} \right\};$$

et comparant cette équation à celle (a) on en déduit

$$\int_0^1 x^{p-2} dx (1-x)^{q-1} = \frac{p+q-1}{p-1} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \quad (3),$$

(V. aussi LA-CROIX. T. 3 p. 422).



Pour plus de simplicité on pourra représenter

$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$  par  $(p, q)$ , alors réunissant les trois

résultats qu'on vient de trouver on les exprimera par

$$(1) \quad (p, q) = (q, p)$$

$$(2) \quad \begin{cases} (p, q)(p+q, m) = (q, p)(p+q, m) \\ = \text{etc.} \end{cases}$$

$$(3) \quad (p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} (p-1, q).$$

7. L'intégrale  $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$  peut être déterminée exactement dans plusieurs cas; si par exemple on avoit  $p+q=1$ , alors elle ne dépendroit que de la circonférence du cercle, en effet substituant dans l'équation (a)  $1-p$  à la place de  $q$  on a

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p(1-p)} \left\{ \frac{1 \cdot 2}{(p+1)(2-p)} \cdot \frac{2 \cdot 3}{(p+2)(3-p)} \cdots \frac{r \cdot r+1}{(p+r)(r+1-p)} \right\}$$

ou bien

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1 \cdot 1}{(1-p)(p+1)} \cdot \frac{2 \cdot 2}{(2-p)(p+2)} \cdots \frac{r \cdot r}{(r-p)(p+r)} \right\} \frac{r+1}{r+1-p}$$

à cause de  $r=\infty$ , le dernier facteur en dehors de la parenthèse est égal à l'unité, et l'équation peut se mettre sous la forme

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{1-p^2} \cdot \frac{1}{1-p^2} \cdot \frac{1}{1-p^2} \cdots \frac{1}{1-p^2} \right\}$$

mais on sait (introduction à l'analyse de l'infini) que cette expression comprise entre la parenthèse du second membre est équivalente à  $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ ,  $\pi$  étant la demi-circonférence du

cercle dont le rayon = 1, ainsi lorsque  $p+q=1$  on a

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{\sin q\pi}.$$

8. La même équation (a) servira également à faire connaître l'intégrale  $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$  du n.º 1, il suffira de changer dans le second membre de cette équation  $p, q$  en  $\frac{p}{n}, \frac{q}{n}$  et le diviser ensuite par  $n$ ; l'on obtiendra par ces changemens

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} = \frac{p+q}{pq} \left\{ \begin{array}{l} \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{rn(p+q+rn)}{(p+rn)(q+rn)} \end{array} \right\},$$

cette équation coïncide avec celle que M. LACROIX a donné dans son troisième volume en la déduisant de la comparaison des intégrales définies pag. 347.

9. On pourra encore au moyen de l'équation (a) vérifier le beau théorème de M. LEGENDRE T. 2 p. 12

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1},$$

si on change dans l'équation (a) successivement  $p$  en  $q$ , et  $p$  en  $\frac{1}{2}$  on aura les deux équations

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{2}{q} \left\{ \frac{(2q+1)}{(q+1)^2} \cdot \frac{2(2q+2)}{(q+2)^2} \cdot \cdot \cdot \frac{r(2q+r)}{(q+r)^2} \right\}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1+2q}{q} \left\{ \frac{(2q+3)}{3(q+1)} \cdot \frac{2(2q+5)}{5(q+2)} \cdot \cdot \cdot \frac{r(2q+2r+1)}{(2r+1)(q+r)} \right\};$$

or il est facile de voir que le second membre de la première de ces deux équations peut s'écrire sous la forme

$$\frac{2}{1+2q} \left\{ \frac{3(2q+1)}{(q+1)(2q+3)} \cdot \frac{5(2q+2)}{(q+2)(2q+5)} \cdot \frac{7(2q+3)}{(q+3)(2q+7)} \cdots \frac{(2r+1)(2q+r)}{(q+r)(2q+2r+1)} \right\} \\ \frac{1+2q}{q} \left\{ \frac{(2q+3)}{3(q+1)} \cdot \frac{2(2q+5)}{5(q+2)} \cdot \frac{3(2q+7)}{7(q+3)} \cdots \frac{r(2q+2r+1)}{(2r+1)(q+r)} \right\};$$

comparant ce produit avec le second membre de la seconde équation on déduit évidemment

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \\ \frac{2}{1+2q} \left\{ \frac{3(2q+1)}{(q+1)(2q+3)} \cdot \frac{5(2q+2)}{(q+2)(2q+5)} \cdots \frac{(2r+1)(2q+r)}{(q+r)(2q+2r+1)} \right\} \\ \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1}.$$

Je supposerai d'abord que  $q$  est un nombre entier, dans ce cas en séparant les facteurs qui forment le second membre de cette dernière équation on pourra l'écrire

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \\ \frac{2}{1+2q} \left\{ \frac{3}{q+1} \cdot \frac{5}{q+2} \cdots \frac{2q-1}{2q-1} \cdot \frac{2q+1}{2q} \cdots \frac{2r+1}{q+r} \right\} \\ \left\{ \frac{2q+1}{2q+3} \cdot \frac{2q+2}{2q+5} \cdots \frac{q+r}{2r+1} \cdot \frac{q+r+1}{2r+3} \cdots \frac{2q+r}{2q+2r+1} \right\} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1};$$

à cause de  $r=\infty$ , le produit des  $q$  derniers facteurs de la seconde parenthèse est

$$\frac{q+r+1}{2r+3} \cdot \frac{q+r+2}{2r+5} \cdot \frac{q+r+3}{2r+7} \cdots \frac{2q+r}{2q+2r+1} = \frac{r^q}{(2r)^q} = \frac{1}{2^q},$$

et les  $r-q$  facteurs restans, font disparaître les  $r-q$  derniers facteurs de la première parenthèse, ainsi il restera simplement

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \\ \frac{1}{2^q} \left\{ \frac{1}{q} \cdot \frac{3}{q+1} \cdot \frac{5}{q+2} \cdots \frac{2q-1}{2q-1} \right\} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1}.$$

Soit  $\frac{1}{q} \cdot \frac{3}{q+1} \cdot \frac{5}{q+2} \dots \frac{2q-1}{2q-1} = Y_q$

de là  $\frac{1}{q+1} \cdot \frac{3}{q+2} \cdot \frac{5}{q+2} \dots \frac{2q-1}{2q} \cdot \frac{2q+1}{2q+1} = Y_{q+1}$

il est facile de voir que  $Y_q = 2 Y_{q+1}$

équation aux différences finies laquelle étant intégrée donne  $Y_q = \frac{C}{2^q}$ .

mais lorsque  $q = 1$ . on a  $Y_q = 1$  donc  $C = 2$ ,

ou bien  $\frac{1}{q} \cdot \frac{3}{q+1} \cdot \frac{5}{q+2} \dots \frac{2q-1}{2q-1} = \frac{1}{2^{q-1}}$

faisant cette substitution dans l'équation supérieure on aura enfin

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{2^q} \cdot \frac{1}{2^{q-1}} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1};$$

mais supposons suivant la généralité du théorème que  $q$  est un nombre quelconque positif, entier ou fractionnaire on posera

$$\frac{2}{1+2q} \left\{ \frac{3(2q+1)}{(q+1)(2q+3)} \cdot \frac{5(2q+2)}{(q+2)(2q+5)} \dots \frac{(2r+1)(2q+r)}{(q+r)(2q+2r+1)} \right\} = Y_q$$

et changeant  $q$  en  $q+1$

$$\frac{2}{3+2q} \left\{ \frac{3(2q+3)}{(q+2)(2q+5)} \cdot \frac{5(2q+4)}{(q+3)(2q+7)} \dots \frac{(2r+1)(2q+2r+2)}{(q+r+1)(2q+2r+3)} \right\} = Y_{q+1};$$

or il sera facile de s'assurer que  $\frac{Y_q}{Y_{q+1}} = 4$  c'est-à-dire

qu'on aura l'équation aux différences finies  $Y_q = 2^2 Y_{q+1}$ ,

cette dernière étant intégrée on obtient  $Y_q = \frac{C}{2^{2q}}$ , mais lors-

que  $q = 1$  on a  $Y_q = \frac{1}{2}$  et de là  $C = 2$  partant  $Y_q = \frac{1}{2^{2q-1}}$

d'où enfin substituant

$$\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{1}{2^{2q-1}} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} dx (1-x)^{q-1}.$$

10. Je vais considérer maintenant les intégrales Euleriennes de la seconde espèce, exprimée généralement par la formule  $\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1}$ , ou, d'après la désignation de M. LE-GENDRE par  $\Gamma(q)$ , cette intégrale se réduit comme la précédente à un produit de facteurs dont le nombre sera fini si  $q$  est un nombre entier, ou infini si cette quantité est une fraction ou un nombre irrationnel.

11. Nous avons d'après LA-GRANGE dans sa 4.<sup>e</sup> leçon sur le calcul des fonctions, les expressions

$$\log. x = r (x^{\frac{1}{r}} - 1), \text{ ou } \log. x = r (1 - x^{-\frac{1}{r}})$$

pourvu qu'on suppose  $r = \infty$ ; c'est qu'on déduit très-simplement de la considération des suites

$$x^{\frac{1}{r}} = 1 + \frac{1}{r} \log. x + \frac{1}{2r^2} (\log. x)^2 + \text{etc.}$$

$$x^{-\frac{1}{r}} = 1 - \frac{1}{r} \log. x - \frac{1}{2r^2} (\log. x)^2 + \text{etc.}$$

Au moyen de ces expressions, une fonction logarithmique quelconque peut toujours se réduire à une forme purement algébrique, alors intégrant comme à l'ordinaire, et réduisant ensuite l'expression obtenue à la forme la plus simple, on obtiendra l'intégrale cherchée par la supposition de  $r = \infty$ .



Soit par exemple  $\int x^{p-1} dx \log. \frac{1}{x}$ , on pourra faire  
 $\log. \frac{1}{x} = r (1 - (\frac{1}{x})^{-\frac{1}{r}}) = r (1 - x^{\frac{1}{r}})$  et de là

$$\int x^{p-1} dx \log. \frac{1}{x} = r \int x^{p-1} dx (1 - x^{\frac{1}{r}});$$

l'intégrale donne

$$\int x^{p-1} dx \log. \frac{1}{x} = \frac{rx^p}{p(r+1)} \{ 1 + pr (1 - x^{\frac{1}{r}}) \};$$

que l'on remette  $\log. \frac{1}{x}$  à la place de  $r (1 - x^{\frac{1}{r}})$  et que l'on fasse ensuite  $r = \infty$ , il viendra

$$\int x^{p-1} dx \log. \frac{1}{x} = \frac{x^p}{p^2} (1 + p \log. \frac{1}{x}).$$

12. Considérons l'expression plus générale

$\int x^n dx (\log. x)^q$ ; on la changera d'abord en  
 $r^q \int x^n dx (x^{\frac{1}{r}} - 1)^q$ , posant ensuite pour plus de simpli-  
 cité  $x = z^r$ , et  $r(n+1) - 1 = m = \infty$  on aura l'équation  
 transformée

$$\int x^n dx (\log. x)^q = r^{q+1} \int z^m dz (z-1)^q,$$

mais d'après le n.º 4

$$r^{q+1} \int z^m dz (z-1)^q =$$

$$r^{q+1} (z-1)^{q+1} M \left\{ z + \frac{(q+2)}{2} z^2 + \frac{(q+2)(q+3)}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{(q+2)(q+3)(q+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \text{etc.} \right\}$$

$$+ r^{q+1} \frac{(z-1)^{q+1}}{q+1} M + \text{const.},$$

dans laquelle  $M = \frac{1}{q+2} \cdot \frac{2}{q+3} \cdot \frac{3}{q+4} \cdots \frac{m}{q+m+1}$ ;

remettant dans cette équation pour  $z$  sa valeur en  $x$ , et supposant  $r$ , et  $m$ , infinis elle donnera l'intégrale cherchée.

13. Pour particulariser le cas supposons  $q=1$  alors

$$M = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{m}{m+2} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2}$$

et supposant que l'intégrale commence avec  $z$  il viendra

$$\int x^n dx \log. x = r^2 \int z^m dz (z-1) \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot r^2 (z-1)^2}{m+1 \cdot m+2} \left\{ z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{4}{3} z^3 + \frac{5}{2} z^4 + \dots \text{etc.} \right\} + \frac{1 \cdot 2 \cdot r^2}{m+1 \cdot m+2} \left( \frac{z^2}{2} - z \right),$$

si on multiplie la série comprise entre les crochets par le facteur  $(z-1)^2$  qui se trouve en dehors, et qu'après on réduise tout le second membre à la forme la plus simple, l'équation précédente se change en

$$r^2 \int z^m dz (z-1) = \frac{r^2}{m+1 \cdot m+2} \left\{ (m+1) z^{m+2} - (m+2) z^{m+1} \right\},$$

ou bien à cause de  $z = x^{\frac{1}{r}} = 1 + \frac{1}{r} \log. x$  en

$$\int x^n dx \log. x = \frac{r^2}{m+1 \cdot m+2} \left\{ (m+1) \frac{1}{r} \log. x - 1 \right\} \left( 1 + \frac{1}{r} \log. x \right)^{m+1},$$

mais on a  $m+1 \cdot m+2 = m^2$ , et  $m=r(n+1)$  donc, substituant,

$$\int x^n dx \log. x = \frac{r^2}{r^2(n+1)^2} \left( 1 + \frac{1}{r} \log. x \right)^{r(n+1)} \left\{ (n+1) \log. x - 1 \right\};$$

enfin posant  $x^{n+1}$  à la place de  $\left( 1 + \frac{1}{r} \log. x \right)^{r(n+1)}$  on parviendra à l'intégrale connue

$$\int x^n dx \log. x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \left\{ (n+1) \log. x - 1 \right\}.$$

14. Pour déterminer cette intégrale après l'avoir transformée en une fonction de  $z$ , et avoir opéré l'intégration, on a du remettre pour  $z$  sa valeur en  $x$ , mais cette substitution ne sera plus nécessaire lorsqu'il sera seulement question d'obtenir l'intégrale entre des limites telles que  $x=0$ ,  $x=1$ , car la supposition de  $x=z^r$  donne également  $z=0$ ,  $z=1$  pour les limites  $x=0$ ,  $x=1$ , ainsi l'équation transformée en  $z$  fera généralement connoître l'intégrale proposée en  $x$ , entre ces limites, sans aucune nouvelle substitution.

15. Soit présentement la fonction Eulerienne de la seconde espèce  $\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1}$ , je fais  $\log. \frac{1}{x} = r(1-x^{\frac{1}{r}})$ , d'où je tire

$$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1} = r^{q-1} \int_0^1 dx (1-x^{\frac{1}{r}})^{q-1},$$

en posant  $x=z^r$ ,  $dx=rz^{r-1}dz$ , il vient

$$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1} = r^q \int_0^1 z^{r-1} dz (1-z)^{q-1},$$

ou bien à cause de  $r=\infty$

$$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1} = r^q \int_0^1 z^r dz (1-z)^{q-1},$$

maintenant par les principes du n.º 4 on aura l'équation

$$\int dx (\log. \frac{1}{x})^{q-1} = -Mr^q (1-z)^q \left\{ z + \frac{(q+1)}{2} z^2 + \frac{(q+1)(q+2)}{2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.} \right\} \\ - Mr^q \frac{(1-z)^q}{q};$$

cette intégrale entre les limites  $z=0$ ,  $z=1$  se réduit au

seul terme  $\frac{Mr^q}{q}$  excepté dans le cas de  $q = 0$ ; de plus on a

$$M = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \dots \frac{r}{q+r}$$

ainsi on aura, hors le cas excepté, l'équation

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{2}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \dots \frac{r}{q+r} \right\}; \quad (b)$$

celle-ci aura lieu quelque soit la valeur de  $q$  entière ou fractionnaire.

16. Si on suppose  $q = 1$ , il vient

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^0 = r \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{r}{r+1} \right\}$$

autrement

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^0 = r \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \dots \frac{r}{r} \right\} \frac{1}{r+1} = \frac{r \cdot 1}{1 \cdot r+1},$$

c'est-à-dire à cause de  $r = \infty$

$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^0 = 1$  comme cela est évident; supposons que  $q$  est un nombre entier quelconque; il est aisé de voir que l'équation (b) pourra s'écrire

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \dots \frac{q}{1} \cdot \frac{q+1}{q+1} \cdot \frac{q+2}{q+2} \dots \frac{r}{r} \right\} \left\{ \frac{1}{r+1} \cdot \frac{1}{r+2} \dots \frac{1}{r+q} \right\},$$

laquelle se réduit facilement à

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} = \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{1}{r+1} \cdot \frac{2}{r+2} \cdot \frac{3}{r+3} \dots \frac{q}{r+q} \right\}$$

ou bien en supposant  $r = \infty$ , ou la changera enfin en

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots q-1$$

(V. les exercices de calcul intégral T. 2 p. 5).

17. Au reste quelque soit le nombre  $q$  entier ou fractionnaire, on pourra faire

$$r^q = \left\{ \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{r+1}{r} \right\}^q$$

en effet, en avançant d'un rang tous les numérateurs cette expression revient à

$$r^q = \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \dots \frac{r}{r} \right\}^q \left( \frac{r+1}{1} \right)^q = (r+1)^q$$

ce qui est rigoureusement vrai à cause de  $r = \infty$ ; il suit de là que l'équation (b) peut être changée en

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} = \frac{1}{q} \left\{ \frac{2^q \cdot 1}{1^q \cdot q+1} \cdot \frac{3^q \cdot 2}{2^q \cdot q+2} \cdot \frac{4^q \cdot 3}{3^q \cdot q+3} \dots \frac{(r+1)^q \cdot r}{r^q \cdot q+r} \right\} \quad (c)$$

plus on prendra des facteurs dans le second membre, et plus on approchera de la véritable valeur de l'intégrale puisque ces facteurs approchent continuellement de l'unité; en supposant  $q = 1$  on trouvera encore

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^0 = 1 \left\{ \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3} \dots \frac{r+1 \cdot r}{r \cdot r+1} \right\} = 1$$

comme supérieurement.

18. Si dans l'équation (b) on change  $q$  en  $q + 1$ , il viendra

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^q = \frac{r^{q+1}}{q+1} \left\{ \frac{1}{q+2} \cdot \frac{2}{q+3} \cdot \frac{3}{q+4} \dots \frac{r}{q+r+1} \right\}$$

laquelle peut s'écrire

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^q = r^{q+1} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \dots \frac{r}{q+r} \right\} \frac{1}{q+r+1}$$

mais, à cause de  $r = \infty$ , on a  $\frac{r^{q+1}}{q+r+1} = r^q$



ainsi l'on aura l'équation

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^q = r \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r} \right\}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^q = q \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \quad (4)$$

laquelle d'après la désignation de M. LE-GENDRE pourra être exprimée par

$$\Gamma(q+1) = q \Gamma(q);$$

de là il est aisé de déduire

$$\Gamma(q+2) = (q+1) \Gamma(q+1) = q \cdot q+1 \cdot \Gamma(q)$$

$$\Gamma(q+3) = (q+2) \Gamma(q+2) = q \cdot q+1 \cdot q+2 \Gamma(q)$$

et en général

$$\Gamma(q+m) = q \cdot q+1 \cdot q+2 \cdots q+m-1 \cdot \Gamma(q)$$

d'où il suit, que si on distingue dans les valeurs successives de  $\Gamma(q)$  plusieurs périodes, la première comprise depuis  $q=0$  jusqu'à  $q=1$ , la seconde depuis  $q=1$  jusqu'à  $q=2$  et ainsi de suite à l'infini; par les rapports précédents connoissant la valeur  $\Gamma(q)$  dans toute l'étendue d'une de ces périodes on pourra déterminer sa valeur relativement à une autre période quelconque sans aucune nouvelle intégration (V. exercices Tom. 2 pag. 5).

19. Si on change dans l'équation (b)  $q$  en  $q+p$  on obtient

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q+p-1} = \frac{r^{p+q}}{p+q} \left\{ \frac{1}{p+q+1} \cdot \frac{2}{p+q+2} \cdot \frac{3}{p+q+3} \cdots \frac{r}{p+q+r} \right\},$$

et si on multiplie entr'elles les deux équations

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} = \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r} \right\}$$

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{p-1} = \frac{r^p}{p} \left\{ \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{3}{p+3} \cdots \frac{r}{p+r} \right\}$$

on a le produit

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \cdot \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{p-1} = \frac{r^{p+q}}{pq} \left\{ \frac{1 \cdot 1}{(q+1)(p+1)} \cdot \frac{2 \cdot 2}{(q+2)(p+2)} \cdots \frac{r \cdot r}{(q+r)(p+r)} \right\};$$

de là il est aisé de conclure

$$\frac{\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \cdot \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{p-1}}{\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q+p-1}} =$$

$$\frac{p+q}{pq} \left\{ \frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)} \cdot \frac{2 \cdot (p+q+2)}{(p+2)(q+2)} \cdots \frac{r(p+q+r)}{(p+r)(q+r)} \right\};$$

or (n.° 4) le second membre de cette dernière équation est équivalent à  $\int_0^1 dx^{p-1} (1-x)^{q-1}$ , donc substituant on aura l'équation

$$\frac{\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} \cdot \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{p-1}}{\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q+p-1}} = \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}.$$

$$\text{ou bien } \frac{\Gamma(q) \Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} = (p \cdot q). \quad (5)$$

20. En supposant  $p+q=1$  on a trouvé (n.° 7)

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = \frac{\pi}{\sin. p\pi} = \frac{\pi}{\sin. q\pi}$$

$$\text{c'est-à-dire } (1-q \cdot q) = \frac{\pi}{\sin. q\pi}$$

or en vertu de la dernière équation (5) du n.º précédent on a

$$(1-q \cdot q) = \Gamma(1-q) \Gamma(q)$$

$$\text{d'où il résulte } \Gamma(1-q)\Gamma(q) = \frac{\pi}{\sin. q\pi}; \quad (6)$$

pour vérifier ce théorème il suffira de remarquer que

$$\Gamma(q) = \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1} = \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r} \right\}$$

$$\Gamma(1-q) = \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-q} = \frac{r^{1-q}}{1-q} \left\{ \frac{1}{2-q} \cdot \frac{2}{3-q} \cdot \frac{3}{4-q} \cdots \frac{r}{r+1-q} \right\};$$

donc multipliant ces deux équations l'une par l'autre

$$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{r}{q} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r} \right\} \left\{ \frac{1}{1-q} \cdot \frac{2}{2-q} \cdots \frac{r}{r-q} \right\} \frac{1}{r+1-q};$$

$$\text{mais } \frac{r}{q} \cdot \frac{1}{r+1-q} = \frac{1}{q}, \text{ puisque } r=\infty,$$

faisant cette réduction, et effectuant la multiplication on aura

$$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{1}{q} \left\{ \frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{q^2}{4}} \cdot \frac{1}{1-\frac{q^2}{9}} \cdots \frac{1}{1-\frac{q^2}{r^2}} \right\}$$

ce qui revient à

$$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{\pi}{\sin. q\pi}.$$

21. On a vu ( n.º 9 ) que  $(q \cdot q) = 2^{1-2q} \left( \frac{1}{2} \cdot q \right)$  cependant de l'équation (5) du n.º 19 on déduit

$$(q \cdot q) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(q)}{\Gamma(2q)}, \text{ et } \left( \frac{1}{2} \cdot q \right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q)}$$

portant ces valeurs dans la première il vient

$$\frac{\Gamma(q)\Gamma(q)}{\Gamma(2q)} = 2^{1-2q} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q)};$$

de là  $\Gamma(q) \Gamma(\frac{1}{2} + q) = 2^{1-2q} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2q)$ ;

maintenant on a

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^1 dx \left( \log \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}-1} = 2r^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2r}{2r+1} \right\},$$

d'ailleurs on sait, que posant  $r = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2r}{2r-1} \cdot \frac{2r}{2r+1}.$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme

$$\frac{\pi}{2} = \left\{ \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2r}{2r-1} \right\} \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2r}{2r+1} \right\}$$

ou bien à cause que

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2r}{2r-1} \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2r-2}{2r-1} \cdot \frac{2r}{2r+1} \right\} (2r+1)$$

on le changera en

$$\frac{\pi}{2} = (2r+1) \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2r}{2r+1} \right\}^2$$

et de là  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2r}{2r+1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{r}}$ ;

enfin portant cette valeur dans l'équation supérieure on aura

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \sqrt{r} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{r}} = \sqrt{\pi}$$

partant  $\Gamma(q) \Gamma(\frac{1}{2} + q) = 2^{1-2q} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2q)$ . (7)

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) sont celles d'où dépend en général toute la théorie des intégrales Euleriennes (V. exercices Tom. 2 pag. 25).

$$22. \text{ De } \Gamma(q+1) = r^q \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{r}{q+r} \right\} (\text{u.}^\circ 18)$$

on déduit

$$\log. \Gamma (q+1) = q \log. r + \log. 1 + \log. 2 \dots + \log. r \\ - \log. (q+1) - \log. (q+2) \dots \log. (q+r),$$

différentiant par rapport à  $q$  on trouvera

$$\frac{d \log. \Gamma (q+1)}{dq} = \log. r - \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q+2} - \frac{1}{q+3} \dots - \frac{1}{q+r}$$

cependant (V. LA-CROIX Tom. 3 pag. 147) on sait que

$$\log. r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{r} - C$$

d'où il suit

$$\frac{d \log. \Gamma (q+1)}{dq} = \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \dots + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q+r}\right) - C$$

de cette dernière équation on déduira facilement

$$\frac{d^2 \log. \Gamma (q+1)}{dq^2} = \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+2)^2} \dots + \frac{1}{(q+r)^2}$$

ainsi que toutes les autres différentielles successives, telles qu'on les trouve dans les exercices du calcul intégral Tom. 2 pag. 17.

23. Nous avons vu que lorsque  $q$  est un nombre entier, on obtient exactement la valeur de  $\Gamma (q)$  au moyen de l'équation

$$\Gamma (q) = 1. 2. 3. 4 \dots q - 1$$

lorsque  $q$  est une fraction on pourra recourir à l'équation (c) du n.º 17; cette équation n'est rigoureuse que dans la supposition de  $r = \infty$ , mais elle donnera une valeur de la fonction d'autant plus approchée qu'on prendra pour  $r$  un nombre considérable; posons à la place de  $r$  un nombre très-grand égal à  $n$  on aura d'après cette formule

$$\Gamma (q) = \frac{1}{q} \left\{ \frac{2^q . 1}{1^q . q+1} \cdot \frac{3^q . 2}{2^q . q+2} \cdot \frac{4^q . 3}{3^q . q+3} \dots \frac{(n+1)^q . n}{n^q . q+n} \right\}$$



ce qui revient à

$$\Gamma(q) = \frac{1}{q} (n+1)^q \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \frac{3}{q+3} \cdots \frac{n}{q+n} \right\}.$$

Pour faire une application de cette formule soit  $q = \frac{1}{12}$ , il viendra

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = 12 \cdot (n+1)^{\frac{1}{12}} \left\{ \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{36}{37} \cdots \frac{12 \cdot n}{1+12n} \right\}$$

calculant vingt facteurs c'est-à-dire posant  $n = 20$  on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = 12 \cdot (21)^{\frac{1}{12}} \left\{ \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{36}{37} \cdots \frac{12 \cdot 20}{1+12 \cdot 20} \right\}$$

ou bien

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = 12^{21} (21)^{\frac{2}{12}} \left\{ \frac{1}{13} \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{3}{37} \cdots \frac{20}{241} \right\}$$

en passant aux logarithmes

$$\log. \Gamma(12) = 1,06067145$$

cette valeur coïncide dans les cinq premières décimales avec celle donnée par M. LE-GENDRE dans les exercices du calcul intégral Tom. 2 pag. 37. Quoique ces expressions en produits indéfinis approchent continuellement de la véritable valeur, cependant cette approximation est en général trop lente, mais l'ouvrage que je viens de citer ne laisse rien à désirer sur la manière d'approcher de la fonction d'aussiprès qu'on voudra.

24. Après avoir trouvé l'intégrale définie

$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{q-1}$  pour une valeur quelconque de  $q$  excepté le cas de  $q \leq 0$ , je considérerai maintenant le cas particulier de  $q = 0$ , ou l'intégrale définie  $\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-1}$ .

D'après le n.º 15, en posant  $x = z^r$  on trouve

$$\int dx (\log \frac{1}{x})^{-1} = \int z^r dz (1-z)^{-1} \\ = -M \left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \dots + \frac{1}{r} z^r \right\} - M \int \frac{dz}{1-z},$$

$$\text{et } M = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} = 1$$

d'où il suit

$$\int dx (\log \frac{1}{x})^{-1} = - \left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \dots + \frac{1}{r} z^r \right\} - \log(1-z).$$

Si on regardoit  $r$  comme un nombre entier fini, cette formule donneroit l'intégrale de  $z^r dz (1-z)^{-1}$  pour toutes les valeurs qu'on voudroit attribuer à  $r$ , c'est ainsi que posant pour  $r$  les nombres 0, 1, 2, 3 ... etc. on trouvera successivement

$$\int dz (1-z)^{-1} = -\log(1-z)$$

$$\int z dz (1-z)^{-1} = -z - \log(1-z)$$

$$\int z^2 dz (1-z)^{-1} = -z - \frac{1}{2} z^2 - \log(1-z)$$

$$\int z^3 dz (1-z)^{-1} = -z - \frac{1}{2} z^3 - \log(1-z)$$

et ainsi de suite.

25. Il faut bien faire attention relativement à l'intégrale qu'on vient de trouver, que la série

$-(z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \dots + \frac{1}{r})$  ne peut pas être remplacée par la fonction logarithmique  $\log(1-z)$  dont elle est le développement, ce qui rendroit l'intégrale nulle; cette série ne sauroit coïncider avec la fonction que dans le cas seulement de  $z$  infiniment petit.

Cette intégrale étant nulle lorsque  $z = 0$  on n'aura qu'à faire  $z = 1$  pour avoir l'intégrale cherchée où la valeur de

$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{-1}$ ; on sait ( V. LA-CROIX T. 3 p. 147 )

que  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{r} = \log. r + 0,5772156$ ,

de plus  $\log. (1-z) = r \{ (1-z)^{\frac{1}{r}} - 1 \}$ , et puisque  $z = 1$ ,

il vient  $\log. (1-z) = -r$

donc substituant on aura l'équation

$$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{-1} = r - \log. r - 0,5772156$$

dans laquelle il faudra supposer  $r = \infty$ , mais le logarithme d'un nombre infini, est un infini d'ordre inférieur, d'où

il sera aisé de conclure  $\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{-1} = \infty$ .

26. On parviendra encore à la même conclusion en transformant l'intégrale qu'on vient de trouver en  $z$ , en une fonction de  $x$ . Pour effectuer cette transformation

il suffira d'observer que  $z = x^{\frac{1}{r}}$ ; or ayant posé

$\log. \frac{1}{x} = r (1 - x^{\frac{1}{r}})$  on déduit  $x^{\frac{1}{r}} = 1 - \frac{1}{r} \log. \frac{1}{x}$ , et de là cette suite de valeurs

$$z = 1 - \frac{1}{r} \log. \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2 \cdot \frac{1}{r} \log. \frac{1}{x} + \frac{1}{r^2} (\log. \frac{1}{x})^2 \right\}$$

$$\frac{1}{3} z^3 = \frac{1}{3} \left\{ 1 - 3 \cdot \frac{1}{r} \log. x + 3 \frac{1}{r^2} (\log. \frac{1}{x})^2 + \frac{1}{r^3} (\log. \frac{1}{x})^3 \right\}$$

...

$$\frac{1}{r} z^r = \frac{1}{r} \left\{ 1 - r \cdot \frac{1}{r} \log. x + r^2 \cdot \frac{1}{r^2} (\log. \frac{1}{x})^2 + r^3 \cdot \frac{1}{r^3} (\log. \frac{1}{x})^3 + \dots \right\}$$

ajoutant ensemble ces équations on aura

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{r}z^r = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} \log \frac{1}{x} (1+1+1+\text{etc.}) \\ + \frac{1}{2r^2} (\log \frac{1}{x})^2 (1+2+3+\text{etc.}) \\ - \frac{1}{2r^3} (\log \frac{1}{x})^3 (1+3+6+\text{etc.}) \\ + \text{etc.} \end{cases};$$

les coefficients numériques dans cette dernière équation ne sont autres choses que les suites des nombres figurés, ainsi par la propriété de ces suites on trouvera aisément

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots + \frac{1}{r}z^r = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{r} \\ - \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} (\log \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (\log \frac{1}{x})^3 + \text{etc.} \end{cases},$$

le premier membre de cette équation étant nul lorsque  $z = 0$ , le second devra l'être également si on y fait  $x = 0$ .

Il ne reste plus qu'à exprimer  $\log. (1-z)$  en fonction de  $x$ ; or puisque  $z = 1 - \frac{1}{r} \log \frac{1}{x}$  il est clair que  $\log. (1-z) = \log. (\frac{1}{r} \log \frac{1}{x}) = \log. (\log \frac{1}{x}) - \log. r$ .

Par ces substitutions il vient

$$\int dx (\log \frac{1}{x})^{-1} = - \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} - \log. r + \log. (\log \frac{1}{x}) \right. \\ \left. - \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} (\log \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (\log \frac{1}{x})^3 + \text{etc.} \right\}$$

ou bien puisque  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} = \log. r + 0,5772156$ , désignant par  $A$  le nombre  $0,5772156$ ,

$$\int dx (\log \frac{1}{x})^{-1} = - \left\{ A + \log. (\log \frac{1}{x}) \right. \\ \left. - \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} (\log \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (\log \frac{1}{x})^3 + \text{etc.} \right\} \quad (1)$$

Cette intégrale est nulle d'après ce qu'on vient de remarquer lorsque  $x = 0$ , et l'on voit qu'elle devient infinie si  $x = 1$ , de là il suit

$$\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{-1} = \infty.$$

Si on suppose  $\log. \frac{1}{x} = t$ , d'où  $x = e^{-t}$

et  $dx = -dt e^{-t}$  on trouve

$$\int \frac{e^{-t} dt}{t} = \left\{ A + \log. t - t + \frac{t^2}{2.1.2} - \frac{t^3}{3.1.2.3} + \text{etc.} \right\}$$

laquelle est nulle si  $t = \infty$ , et devient  $-\infty$  quand  $t = 0$

c'est-à-dire qu'on aura  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \infty$  ( V. MASCHERONI *ad-*

*notationes ad calculum integralem Euleri*, et LA-CROIX Tom. 3 pag. 512 ).

27. Si on vouloit connoître l'intégrale  $\int dx (\log. \frac{1}{x})^{-1}$  entre les limites  $x = 1$ ,  $x = \infty$ , on observeroit que dans le cas de  $x > 1$  on a  $\log. \frac{1}{x} = -\log. x$  et  $\log. (\log. \frac{1}{x}) = \log. (-\log. x) = \log. (-1) + \log. (\log. x)$  d'où il suit

$$\int dx (\log. \frac{1}{x})^{-1} = - \int \frac{dx}{\log. x} = - \left\{ A + \log. (-1) + \log. (\log. x) + 1.x + \frac{1}{2.1.2} (1.x)^2 + \frac{1}{3.1.2.3} (1.x)^3 + \text{etc.} \right\}$$

Maintenant par l'addition d'une constante on pourra déterminer le second membre de cette équation de manière qu'il devienne nulle lorsque  $x = e$  ( $e$  étant le nombre dont le log. hip. est l'unité ).



Soit  $B$  cette constante, et supposons

$$A + \log. (-1) - B = K$$

on n'aura plus qu'à considérer l'équation

$$\int dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-1} = - \left\{ K + \log. (\log. x) + \log. x + \frac{1}{2.1.2} (\log. x)^2 + \text{etc.} \right\}$$

dans laquelle il est visible, que le second membre sera nul lorsque  $x=e$ , or si on fait

$$K = - \left\{ 1 + \frac{1}{2.1.2} + \frac{1}{3.1.2.3} + \text{etc.} \right\} = -1,31790215$$

on aura enfin l'intégrale

$$\int dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-1} = - \int \frac{dx}{\log. x} = - \left\{ -1,31790215 + \log. (\log. x) + \log. x + \frac{1}{2.1.2} (\log. x)^2 + \text{etc.} \right\}^{(2)}$$

laquelle sera nulle lorsque  $x=e$ , et dont l'inspection mon-

tre assez que  $\int dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-1}$  entre les limites  $x=1$ ,  $x=e$ , est égal à  $-\infty$ , aussi bien qu'entre  $x=e$ ,  $x=\infty$ .

Si on fait  $\log. x = t$ , d'où  $x = e^t$ , et  $dx = dt e^t$  on aura la transformée

$$\int \frac{e^t dt}{t} = -1,31790215 + \log. t + t + \frac{t^2}{2.1.2} + \frac{t^3}{3.1.2.3} + \text{etc.}$$

laquelle sera nulle si  $t=1$ , et deviendra  $= -\infty$  quand

$$t=0, \text{ d'où l'on conclura } \int_0^1 \frac{e^t dt}{t} = \infty.$$

Si on suppose que  $\int \frac{dx}{\log. x}$  représente l'aire indéterminée de la courbe dont l'équation est exprimée par  $y = \frac{1}{\log. x}$ ,

il est clair qu'ayant par l'équation (1) du n.<sup>o</sup> précédent

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x} = 0,57721560 + \log. 0$$

et par celle (2) de ce n.<sup>o</sup>

$$\int_1^e \frac{dx}{\log x} = 1,31790215 - \log. 0$$

on aura 
$$\int_0^e \frac{dx}{\log x} = 1,89511775$$

pour la différence entre l'aire positive depuis  $x = 1$  jusqu'à  $x = e$ , et celle négative depuis  $x = 0$ , jusqu'à  $x = 1$ .

De là il résulte évidemment qu'entre  $x = 1$ , et  $x = e$  doit exister un point relativement auquel la différence des deux aires positive, et négative soit nulle; on pourra déterminer l'abscisse correspondante  $x$  au moyen de l'équation

$$\int_x^e \frac{dx}{\log x} = 1,89511775 = 1,31790215 - \log. (\log. x) \\ - \left\{ \log. x + \frac{1}{2,1,2} (\log. x)^2 + \text{etc.} \right\};$$

MASCHERONI a trouvé  $x = 1,45137$

(V. LA-CROIX Tom. 3 pag. 528).

28. Avant de terminer cet article je ferai encore l'application de ces formules à d'autres intégrales définies logarithmiques les plus remarquables. Je commencerai d'abord par vérifier le beau théorème d'EULER (exercices Tom. 1 pag. 259).

Les trois intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^q dx}{1-x}, \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}, \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \log. \frac{1}{x}$$

jouissent de cette propriété que la dernière est égale au produit des deux premières.

$$\text{Posons } \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = Z \quad (1)$$

différentiant par rapport à  $p$ , il vient

$$-\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \log. \frac{1}{x} = \frac{dZ}{dp} \quad (2)$$

mais d'après le n.° 4

$$Z = \frac{p+q}{p \cdot q} \left\{ \frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)} \cdot \frac{2(p+q+2)}{(p+2)(q+2)} \cdots \frac{r(p+q+r)}{(p+r)(q+r)} \right\}$$

de là prenant d'abord le logarithme et différenciant ensuite par rapport à  $p$

$$\frac{dZ}{Z} = \left\{ \frac{\frac{dp}{p+q}}{\frac{p+q}{p \cdot q}} + \frac{\frac{dp}{p+q+1}}{\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}} + \frac{\frac{dp}{p+q+2}}{\frac{p+q+2}{(p+2)(q+2)}} + \text{etc.} + \frac{\frac{dp}{p+q+r}}{\frac{p+q+r}{(p+r)(q+r)}} \right\}$$

ou bien

$$-\frac{dZ}{dp} = Z \left\{ -\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+q+1} - \frac{1}{p+q+2} - \text{etc.} - \frac{1}{p+q+r} \right\}$$

substituant dans cette dernière équation pour  $Z$ ,  $\frac{dZ}{dp}$  leurs valeurs tirées des équations (1) (2), on la change en

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \log. \frac{1}{x} = \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \text{etc.} + \frac{1}{p+r} \right. \\ \left. - \frac{1}{p+q} - \frac{1}{p+q+1} - \text{etc.} - \frac{1}{p+q+r} \right\} \quad (3)$$

maintenant d'après le n.º 3 on a

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{-1} = \frac{1}{p} \left\{ x^p + \frac{p}{p+1} x^{p+1} + \text{etc.} + \frac{p}{p+r} x^{p+r} \right\} \\ + \int_0^1 x^r dx (1-x)^{-1},$$

on aura de même  $\int_0^1 x^{p+q-1} dx (1-x)^{-1} =$

$$\frac{1}{p+q} \left\{ x^{p+q} + \frac{p+q}{p+q+1} x^{p+q+1} + \text{etc.} + \frac{p+q}{p+q+r} x^{p+q+r} \right\} + \int_0^1 x dx (1-x)^{-1},$$

or si on retranche l'une de l'autre ces deux équations, considérées entre les limites  $x=0$ ,  $x=1$  l'on trouvera facilement

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1-x} dx = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+q} \right. \\ \left. - \frac{1}{p+q+1} - \frac{1}{p+q+2} - \dots - \frac{1}{p+q+r} \right\}$$

d'où il suit enfin le théorème énoncé (4)

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \log \frac{1}{x} = \\ \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{p+q-1}}{1-x} dx$$

D'après les remarques du n.º 22, en posant  $p=1$ , on déduit de l'équation (4)

$$\int_0^1 \frac{dx(1-x)^q}{1-x} = C + d \frac{\log \Gamma(q+1)}{dq};$$

lorsque  $q$  est un nombre entier, il est clair que l'équation (4) peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^q dx}{1-x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \text{etc.} + \frac{1}{p+q-1} + \frac{1}{p+q} + \text{etc.} + \frac{1}{p+q+r} \\ - \left\{ \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+q+1} + \text{etc.} + \frac{1}{p+q+r} \right\}$$

d'où il suit, à cause de  $r = \infty$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^q dx}{1-x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \text{etc.} + \frac{1}{p+q-1};$$

or si on fait en même tems  $p = 1$ , il viendra

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^q dx}{1-x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} + \frac{1}{q}.$$

donc dans la supposition de  $q$  nombre entier on aura l'équation

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} + \frac{1}{q} = C + \frac{d \log. \Gamma(q+1)}{dq}$$

(exercices Tom. 2 pag. 45-47).

29. Soit proposé de déterminer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n dx}{\log. \frac{1}{x}} \quad (\text{exercices Tom. 1 pag. 370}). \text{ Je pose d'abord}$$

$r (1-x^{\frac{1}{r}})$  à la place de  $\log. \frac{1}{x}$ , et faisant ensuite  $x = z^r$ , j'obtiens la transformée

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n dx}{\log. \frac{1}{x}} = \int z^{r(n+1)} dz (1-z)^{-1} - \int z^r dz (1-z)^{-1}$$

maintenant par le n.° 15 on a

$$\int z^{r(n+1)} dz (1-z)^{-1} = - \left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \text{etc.} + \frac{1}{r(n+1)} z^{r(n+1)} \right\} - 1. (1-z)$$

$$\int z^r dz (1-z)^{-1} = - \left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \text{etc.} + \frac{1}{r} z^r \right\} - \log. (1-z),$$



de là il est aisé de conclure

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n}{\log \frac{1}{x}} dx = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{r} \right\} - \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{r(n+1)} \right\}$$

cependant on sait que (n.° 25)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{r} = \log. r + C$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{r(n+1)} = \log. r + \log. (n+1) + C$$

donc faisant ces substitutions on trouvera

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n}{\log \frac{1}{x}} dx = \log. \left( \frac{1}{n+1} \right),$$

de plus à cause que  $\log. \frac{1}{x} = -\log. x$

on aura encore

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n}{\log. x} dx = - \int_0^1 \frac{(x-1)^n}{\log. \frac{1}{x}} dx = \log. (n+1).$$

On aura de même

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(x-1)^n x^m}{\log. \frac{1}{x}} dx &= \int_0^1 \frac{(x-1)^{n+m}}{\log. \frac{1}{x}} dx - \int_0^1 \frac{(x-1)^m}{\log. \frac{1}{x}} dx \\ &= \log. \left( \frac{1}{m+n+1} \right) - \log. \left( \frac{1}{m+1} \right) = \log. \left( \frac{m+1}{m+n+1} \right); \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_0^1 \frac{(x-1)^n x^m}{\log. x} dx = \log. \left( \frac{m+n+1}{m+1} \right).$$

$$30. \text{ Considérons l'intégrale } \int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-x)^m}{(1-x) \log. \frac{1}{x}} dx$$

(exercices Tom. 2 pag. 108), et supposons d'abord pour

plus de simplicité que l'un des deux exposants  $m$  ou  $n$  est un nombre entier ; dans ce cas il suffira de développer

$\frac{1-x}{1-x^n}$ , ou  $\frac{1-x}{1-x^m}$  suivant les puissances de  $x$  : soit par exemple l'exposant  $m$  un nombre entier, il est clair qu'on aura l'équation

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-x)^m dx}{(1-x) \log \frac{1}{x}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^n dx}{\log \frac{1}{x}} \left\{ 1 + x + x^2 + \text{etc.} + x^{m-1} \right\}$$

donc d'après le n.<sup>o</sup> précédent

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-x)^m dx}{(1-x) \log \frac{1}{x}} = \log \left\{ \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m}{m} \right\}.$$

Si l'exposant  $n$  étoit également un nombre entier, alors l'intégrale pourroit se mettre sous la forme

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-x)^m dx}{(1-x) \log \frac{1}{x}} = \log \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n+1 \cdot n+2 \dots \text{etc.} \cdot n+m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots m} \right\}$$

ce qui revient à

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-x)^m dx}{(1-x) \log \frac{1}{x}} = \log \left\{ \frac{\int_0^1 dx \left( \log \frac{1}{x} \right)^{m+n}}{\int_0^1 dx \left( \log \frac{1}{x} \right)^n \int_0^1 dx \left( \log \frac{1}{x} \right)^m} \right\}.$$

Cependant la formule précédente a lieu quelques soient les valeurs des exposants  $m$  et  $n$  ; en effet posons d'abord  $n = a - 1$  et pour plus de simplicité considérons l'intégrale

$$Z = \int_0^1 \frac{(1-x)^{a-1} (1-x)^m dx}{(1-x) \log \frac{1}{x}}$$

on en déduira par la différentiation

$$\frac{dZ}{da} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} (1-x)^m}{1-x} dx$$

et par le n.° 28

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{da} = & \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \text{etc.} + \frac{1}{a+r} \\ & - \frac{1}{a+m} - \frac{1}{a+m+1} - \frac{1}{a+m+2} - \text{etc.} - \frac{1}{a+m+r}, \end{aligned}$$

de là multipliant par  $da$ , et prenant l'intégrale on trouve

$$\begin{aligned} Z = & \log. \{ a . a+1 . a+2 \dots a+r \} \\ & - \log. \{ a+m . a+m+1 \dots a+m+r \} + C \end{aligned}$$

pour déterminer la constante, j'observe que lorsque  $a=1$ , l'intégrale  $Z$  est nulle à cause du facteur  $(1-x^{a-1})$  qui devient zero dans ce cas, ainsi pour la valeur de cette constante il vient

$$\begin{aligned} C = & \log. \{ m+1 . m+2 . m+3 \dots m+r+1 \} \\ & - \log. \{ 1 . 2 . 3 \dots r+1 \}; \end{aligned}$$

après la substitution de cette valeur on pourra donner à l'intégrale la forme

$$Z = \log. \left\{ \frac{\frac{1}{a+m} \cdot \frac{2}{a+m+1} \cdot \frac{3}{a+m+2} \dots \frac{r+1}{a+m+r}}{\left\{ \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a+1} \cdot \frac{3}{a+2} \dots \frac{r+1}{a+r} \right\} \left\{ \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2}{m+2} \cdot \frac{3}{m+3} \dots \frac{r}{m+r+1} \right\}} \right\}$$

ou bien encore

$$Z = \log. \left\{ \frac{\frac{r}{a+m} \left\{ \frac{1}{a+m+1} \cdot \frac{2}{a+m+2} \dots \frac{r}{a+m+r} \right\}}{\frac{r}{a} \left\{ \frac{1}{a+1} \cdot \frac{2}{a+2} \dots \frac{r}{a+r} \right\} \frac{r}{m+1} \left\{ \frac{1}{m+2} \cdot \frac{2}{m+3} \dots \frac{r}{m+r+1} \right\}} \right\}$$

cé qui n'est autre chose, d'après la formule (6) du n.º 15 que

$$Z = \log. \left\{ \frac{\int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{a+m-1}}{\left( \int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^{a-1} \int_0^1 dx (\log. \frac{1}{x})^m \right)} \right\};$$

remettant pour  $Z$  et  $a$  leurs valeurs et faisant usage de la notation de M. LE-GENDRE, on aura quelque soit la valeur de  $m$  et  $n$

$$\int_0^1 \frac{x^n (1-x)^m}{(1-x) \log. \frac{1}{x}} dx = \log. \left\{ \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \right\}.$$

31. Je me proposerai pour dernier exemple de vérifier l'intégrale définie

$$Z = \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{h-1} (1-x)^{h-\frac{1}{2}} dx}{(1-x) \log. \frac{1}{x}} = \log. 2^{2h-2}$$

(exercices Tom. 2 pag. 110).

Afin de commencer d'abord par le cas le plus simple je supposerai premièrement que le nombre  $h$  est un nombre entier d'où il suit

$$Z = \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{h-\frac{1}{2}}}{\log. \frac{1}{x}} \{ 1 + x + x^2 + \text{etc.} + x^{h-2} \}$$

comparant chaque terme de cette intégrale avec la formule du n.º 29

$$\int_0^1 \frac{x^m (1-x)^n}{\log. \frac{1}{x}} dx = \log. \left( \frac{m+n+1}{m+1} \right)$$

il est aisé de déduire

$$Z = \log. \left\{ \frac{2^h}{1} \cdot \frac{2^{h+2}}{3} \cdot \frac{2^{h+4}}{5} \dots \frac{2^{h-4}}{2h-3} \right\},$$

ou bien

$$Z = \log. 2^{h-1} + \log. \left\{ \frac{h}{1} \cdot \frac{h+1}{3} \cdot \frac{h+2}{5} \dots \frac{2h-2}{2h-3} \right\};$$

$$\text{je fais } Y_h = \frac{h}{1} \cdot \frac{h+1}{3} \cdot \frac{h+2}{5} \dots \frac{2h-2}{2h-3}$$

$$\text{d'où } Y_{h+1} = \frac{h+1}{1} \cdot \frac{h+2}{3} \cdot \frac{h+3}{5} \dots \frac{2h}{2h-1}$$

et de là  $\frac{Y_{h+1}}{Y_h} = 2$ , on aura donc l'équation aux différen-

ces finies  $Y_{h+1} = 2 Y_h$  dont l'intégrale est  $Y_h = A 2^h$

et substituant il vient

$$Z = \log. 2^{h-1} + \log. 2^h + \log. A$$

mais lorsque  $h=1$  on doit faire  $Z=0$ , à cause du facteur  $(1-x^{h-1})$  qui devient nul pour  $h=1$ , d'où il suit  $\log. A = -\log. 2$ , enfin  $Z = (2h-2) \log. 2$ .

32. Pour vérifier cette intégrale dans le cas que  $h$  soit une fraction quelconque je reprend l'équation

$$Z = \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x^{h-1}) (1-x^{h-\frac{1}{2}})}{(1-x) (\log. \frac{1}{x})};$$

différentiant par rapport à  $h$  afin de faire disparaître la transcendante  $\log. \frac{1}{x}$  j'obtiens

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dh} &= \int_0^1 x^{h-\frac{5}{2}} dx (1-x)^{-1} + \int_0^1 x^{h-1} dx (1-x)^{-1} \\ &\quad - 2 \int_0^1 x^{2h-2} dx (1-x)^{-1}. \end{aligned}$$



Maintenant, d'après le n.º 3, je pose les trois équations

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{h-\frac{r}{2}} dx (1-x)^{-1} &= \\ \left\{ \frac{1}{h-\frac{1}{2}} + \frac{1}{h+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h+\frac{3}{2}} + \text{etc.} + \frac{1}{h+\frac{2r-3}{2}} \right\} + \int_0^1 x^r dx (1-x)^{-1}; \\ \int_0^1 x^{h-1} dx (1-x)^{-1} &= \\ \left\{ \frac{1}{h} + \frac{1}{h+1} + \frac{1}{h+2} + \text{etc.} + \frac{1}{h+r-1} \right\} + \int_0^1 x^r dx (1-x)^{-1}; \\ 2 \int_0^1 x^{2h-3} dx (1-x)^{-1} &= \\ 2 \left\{ \frac{1}{2h-1} + \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h+1} + \text{etc.} + \frac{1}{2h+r-2} \right\} + 2 \int_0^1 x^r dx (1-x)^{-1}. \end{aligned}$$

J'ajoute les deux premières ensemble, et je retranche de leur somme la troisième; multipliant ensuite le résultat par  $dh$  je forme l'équation

$$dZ = \left\{ \begin{aligned} &\left\{ \frac{2dh}{2h-1} + \frac{2dh}{2h+1} + \frac{2dh}{2h+3} + \text{etc.} + \frac{2dh}{2h+2r-3} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{2dh}{2h} + \frac{2dh}{2h+2} + \frac{2dh}{2h+4} + \text{etc.} + \frac{2dh}{2h+2r-2} \right\} \\ &- \left\{ \frac{2dh}{2h-1} + \frac{2dh}{2h} + \frac{2dh}{2h+1} + \text{etc.} + \frac{2dh}{2h+r-2} \right\} \end{aligned} \right\},$$

chaque série devant être censée formée de  $r$  termes; de là passant à l'intégrale

$$Z = \left\{ \begin{aligned} &\log. \{ (2h-1)(2h+1)(2h+3) \dots (2h+2r-3) \} \\ &+ \log. \{ (2h)(2h+2)(2h+4) \dots (2h+2r-2) \} \\ &- \log. \{ (2h-1)(2h)(2h+1) \dots (2h+r-2) \} \end{aligned} \right\},$$

cette équation se réduira à une forme plus simple, si on réunit ensemble les deux premières suites de facteurs;

on aura

$$Z = \log. \{ (2h-1)(2h)(2h+1)(2h+2) \dots (2h+2r-2) \} \\ - \log. \{ (2h-1)(2h)(2h+1)(2h+2) \dots (2h+r-2) \}$$

et retranchant ensuite le second logarithme du premier il viendra

$$Z = \log. \{ (2h+r-1)(2h+r)(2h+r+1) \dots (2h+2r-2) \} + A,$$

$A$  étant la constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante il suffit d'observer que lorsque  $h=1$  l'intégrale  $Z$  devient nulle, d'où l'on déduit enfin

$$Z = \log. \left\{ \left( \frac{2h+r-1}{r+1} \right) \left( \frac{2h+r}{r+2} \right) \left( \frac{2h+r+1}{r+3} \right) \dots \left( \frac{2h+2r-2}{2r} \right) \right\};$$

maintenant si le nombre des facteurs qui forme le produit dont le logarithme constitue le second membre de cette équation, étoit fini, il est clair à cause de  $r=\infty$ , qu'on pourroit faire chaque facteur égal à l'unité d'où il resulteroit  $Z = \log. 1 = 0$ , mais ici le nombre des facteurs étant infini, cette substitution ne seroit pas légitime, aussi peut-on d'abord s'assurer très-simplement que lorsque  $h$  est un nombre entier, cette valeur de  $Z$  se réduit à  $(2h-2) \log. 2$  comme on l'a trouvé supérieurement.

En effet si  $h$  est un nombre entier le facteur  $(2h-1)^{ieme}$  aura pour dénominateur  $2h+r-1$ , et les suivants seront  $2h+r$ ,  $2h+r+1$ , etc. ainsi on pourra écrire

$$(\text{indices.} \quad 1 \quad 2 \dots (2h-1) \quad 2h \quad \dots \quad r)$$

$$Z = \log. \left\{ \frac{2h+r-1}{r+1} \cdot \frac{2h+r}{r+2} \dots \frac{2h+r+2h-3}{2h+r-1} \cdot \frac{2h+r+2h-2}{2h+r} \dots \frac{2h+2r-2}{2r} \right\}$$

ou bien en avançant tous les numérateurs de  $(2h-2)$  rangs il viendra

$$Z = \log. \left( \frac{1}{r+1} \cdot \frac{1}{r+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2h+r-2} \right) \left( \frac{2h+r-1}{2h+r-1} \cdot \frac{2h+r}{2h+r} \cdot \dots \cdot \frac{2r}{2r} \right) \\ \left( \frac{2r+1}{1} \cdot \frac{2r+2}{1} \cdot \dots \cdot \frac{2r+2h-2}{1} \right)$$

donc supprimant le produit de la seconde parenthèse qui est égal à l'unité on aura l'équation

$$(\text{indices. } 1 \quad 2 \quad \dots \quad 2h-2)$$

$$Z = \log. \left\{ \frac{2r+1}{r+1} \cdot \frac{2r+2}{r+2} \cdot \dots \cdot \frac{2r+2h-2}{r+2h-2} \right\} = \log. 2^{2h-2}$$

comme nous avons trouvé ci-dessus.

Cependant dans la supposition que  $h$  est un nombre positif quelconque je fais

$$\frac{2h+r-1}{r+1} \cdot \frac{2h+r}{r+2} \cdot \frac{2h+r+1}{r+3} \cdot \dots \cdot \frac{2h+2r-2}{2r} = Y_h;$$

de là il sera facile déduire  $Y_{h+1} = 4Y_h$ , équation aux différences finies dont l'intégrale donne  $Y_h = A2^{2h}$ , et déterminant la constante  $A$  de manière que lorsque  $h=1$  l'intégrale soit nulle, on parviendra enfin à l'intégrale cherchée

$$Z = (2h-1) \log. 2.$$

laquelle a lieu pour une valeur quelconque de  $h$ .

33. Jusqu'ici la fonction

$$\Gamma(q) = \frac{r^q}{q} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{2}{q+2} \cdot \dots \cdot \frac{r}{q+r} \right\}$$

a représenté l'intégrale définie  $\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^q$ , ce qui sup-

pose  $q > 0$ , cependant on peut la considérer indépendamment de l'intégrale, et la regarder uniquement comme une

fonction continue de  $q$ ; ce qui donne lieu à plusieurs théorèmes importants (exercices Tom. 2 pag. 60).

D'abord on pourra déduire de la forme de cette fonction les valeurs

$$\Gamma(1-q) = \frac{r^{1-q}}{1-q} \left\{ \frac{1}{2-q} \cdot \frac{2}{3-q} \cdot \frac{3}{4-q} \cdots \frac{r}{r+1-q} \right\}$$

$$\Gamma(-q) = \frac{r^{-q}}{-q} \left\{ \frac{1}{1-q} \cdot \frac{2}{2-q} \cdot \frac{3}{3-q} \cdots \frac{r}{r-q} \right\}$$

d'où il sera aisé de conclure l'équation

$$\Gamma(-q) = -\frac{1}{q} \Gamma(1-q);$$

on déduira semblablement

$$\Gamma(-1-q) = \frac{-1}{q+1} \Gamma(-q) = \left(\frac{-1}{q+1}\right) \left(\frac{-1}{q}\right) \Gamma(1-q)$$

$$\Gamma(-2-q) = \left(\frac{-1}{q+2}\right) \left(\frac{-1}{q+1}\right) \Gamma(-q) = \left(\frac{-1}{q+2}\right) \left(\frac{-1}{q+1}\right) \left(\frac{-1}{q}\right) \Gamma(1-q)$$

ainsi de-suite; ces formules sont analogues à celle du (n.º 18) mais les fonctions  $\Gamma(-q)$ ,  $\Gamma(-1-q)$ , etc. ne seront plus ici équivalentes aux intégrales

$$\int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-q-1}, \quad \int_0^1 dx \left( \log. \frac{1}{x} \right)^{-2-q}, \quad \text{etc.}$$

Avant de terminer cette première partie du mémoire je noterai encore l'intime liaison qui existe entre les fonctions factorielles et celles désignées par  $\Gamma$ .

Dans la théorie des fonctions factorielles on désigne par

$[q]^n$  le produit des  $n$  facteurs consécutifs

$$q-n+1 \cdot q-n+2 \cdot q-n+3 \cdots q-1 \cdot q,$$

partant on aura les trois équations

$$[q]^n = q - n + 1 \cdot q - n + 2 \dots q - 1 \cdot q$$

$$[q]^q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q$$

$$[q-n]^{q-n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q-n$$

comparant ces équations entr'elles on obtient

$$[q]^q = [q] \cdot [q-n]^{q-n}, \text{ ou } [q]^n = \frac{[q]^q}{[q-n]^{q-n}} \quad (1)$$

On suppose ici pour  $q$  et  $n$  des nombres entiers et  $q > n$ , d'où il suit évidemment

$$[q]^q = q \Gamma(q) = \Gamma(1-q)$$

$$[q-n]^{q-n} = (q-n) \Gamma(q-n) = \Gamma(1-q+n);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1) on la change en

$$[q]^n = \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(1-q+n)} \quad (2)$$

Quoique cette équation soit tirée du cas particulier de  $n$  et  $q$  nombres entiers, cependant il est clair, qu'en vertu de la continuité de ces fonctions la même équation devra subsister pour toute autre valeur de  $q$  et  $n$ .

Posant dans l'équation (2) pour  $\Gamma(1-q)$ ,  $\Gamma(1-q+n)$  leurs expressions en facteurs indéfinis on trouvera aisément

$$[q]^n = r^n \left\{ \frac{q-n+1}{q+1} \cdot \frac{q-n+2}{q+2} \dots \frac{q-n+r}{q+r} \right\}$$

et de là changeant  $n$  en  $-n$

$$[q]^{-n} = r^{-n} \left\{ \frac{q+n+1}{q+1} \cdot \frac{q+n+2}{q+2} \dots \frac{q+n+r}{q+r} \right\}.$$

Si on suppose que  $n$  soit un nombre entier, en avançant dans la première équation tous les dénominateurs de  $n$  rangs vers la droite, et en avançant de même dans la seconde tous les numérateurs, on pourra les écrire



$$\begin{aligned}
[q]^n &= r^n \left\{ \frac{q-n+1}{1} \cdot \frac{q-n+2}{1} \dots \frac{q}{1} \right\} \left\{ \frac{q+1}{q+1} \cdot \frac{q+2}{q+2} \dots \frac{q-n+r}{q-n+r} \right\} \\
&\quad \left\{ \frac{1}{q-n+r+1} \cdot \frac{1}{q-n+r+2} \dots \frac{1}{q-r} \right\} \\
[q]^{-n} &= r^{-n} \left\{ \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{q+2} \dots \frac{1}{q+n} \right\} \left\{ \frac{q+n+1}{q+n+1} \cdot \frac{q+n+2}{q+n+2} \dots \frac{q+r}{q+r} \right\} \\
&\quad \left\{ \frac{q+r+1}{1} \cdot \frac{q+r+2}{1} \dots \frac{q+r+n}{1} \right\}
\end{aligned}$$

lesquelles par la supposition de  $r = \infty$  se reduiront simplement a

$$[q]^n = q-n+1 \cdot q-n+2 \dots q$$

$$[q]^{-n} = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{q+2} \cdot \frac{1}{q+3} \dots \frac{1}{q+n},$$

la première formule est celle établie ci-dessus :

la seconde est connue dans la théorie des fonctions factorielles (LA-CROIX Tom. 3 pag. 122).

## II.

*Des fonctions exponentielles et circulaires.*

34. Les fonctions différentielles exponentielles, et circulaires se ramènent aisément aux fonctions logarithmiques, et sont susceptibles des mêmes transformations. Soit d'abord

question de trouver l'intégrale définie  $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^n} dx$ ; on sait

que  $-ax = \log. e^{-ax}$ ,  $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique  $= 1$ , ainsi d'après les formules employées jusqu'ici on fera

$$-ax = r \left( e^{\frac{-ax}{r}} - 1 \right), \text{ ou } e^{-ax} = \left( 1 - \frac{ax}{r} \right)^r;$$

la proposée sera changée en  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^n} \left( 1 - \frac{ax}{r} \right)^r$ .

Je pose maintenant  $1 - \frac{ax}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ , partant

$$ax = r \left( 1 - u^{\frac{1}{r}} \right) = \log. \frac{1}{u}, \text{ et } dx = - \frac{du}{au},$$

alors par ces substitutions on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{a^{n-1} du}{\left( \log. \frac{1}{u} \right)^n}.$$

Pour faire quelque application soit  $n = \frac{1}{2}$  il viendra d'après le n.º 21

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx = a^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}};$$

si on suppose  $n = 1$ , alors  $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} dx}{x} = \int_0^1 \frac{du}{\log \frac{1}{u}}$

or par le n.<sup>o</sup> 26

$$\int_0^1 \frac{du}{\log \frac{1}{u}} = - \left\{ A + \log. \left( \log. \frac{1}{u} \right) \right. \\ \left. - \log. \frac{1}{u} + \frac{1}{2.1.2} \left( \log. \frac{1}{u} \right)^2 - \frac{1}{3.1.2.3} \left( \log. \frac{1}{u} \right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

$A$  désignant le nombre 0,5772156

donc remettant  $ax$  à la place de  $\log. \frac{1}{u}$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} dx}{x} = \left\{ A + \log. (ax) \right. \\ \left. - ax + \frac{1}{2.1.2} (ax)^2 - \frac{1}{3.1.2.3} (ax)^3 + \text{etc.} \right\};$$

la première étant nulle lorsque  $u = 0$ , celle-ci sera pareillement nulle si  $x = \infty$ , et entre les limites  $x = 0$   $x = \infty$  on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} dx}{x} = -A - \log. a - \log. 0,$$

on aura de même

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a'x} dx}{x} = -A - \log. a' - \log. 0,$$

d'où il est aisé de conclure

$$\int_0^\infty dx \left( \frac{e^{-a'x} - e^{-ax}}{x} \right) = \log. a - \log. a'.$$

Si on vouloit calculer directement l'intégrale définie

$$\int_0^\infty dx \left( \frac{e^{-a'x} - e^{-ax}}{x} \right), \text{ on la changeroit d'abord en}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \left( 1 - \frac{a'x}{r} \right)^r - \left( 1 - \frac{ax}{r} \right)^r \right\};$$

ensuite faisant comme ci-dessus

$$1 - \frac{ax}{r} = u^{\frac{1}{r}} \text{ d'où } ax = r(1 - u^{\frac{1}{r}}) = \log. \frac{1}{u},$$

$$\text{on en déduira } x = \frac{1}{a} \left( \log. \frac{1}{u} \right), dx = -\frac{du}{au},$$

$$a'x = \log. \frac{1}{u^{\frac{a'}{a}}} = r(1 - u^{\frac{a'}{ra}}),$$

$$\text{et } 1 - \frac{a'x}{r} = u^{\frac{a'}{ra}}; \text{ au moyen de ces substitutions l'intégrale}$$

$$\text{précédente sera changée en } \int_0^1 \frac{u^{\frac{a'}{ra}-1} du}{\log. \frac{1}{u}} - \int_0^1 \frac{du}{\log. \frac{1}{u}};$$

maintenant si on fait d'après le n.º 15

$$\log. \frac{1}{u} = r(1 - u^{\frac{1}{r}}), \text{ et } u = z^r \text{ on aura enfin}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx(e^{-\frac{a'x}{r}} - e^{-ax})}{x} = \int_0^1 z^{\frac{ra'}{a}} dz (1-z)^{-1} - \int_0^1 z^r dz (1-z)^{-1},$$

mais d'après le n.º 24 on a

$$\int_0^1 z^{\frac{ra'}{a}} dz (1-z)^{-1} = -\left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 \dots + \frac{1}{\frac{ra'}{a}} z^{\frac{ra'}{a}} \right\} - \log (1-z)$$

$$\int_0^1 z^r dz (1-z)^{-1} = -\left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 \dots + \frac{1}{r} z^r \right\} - \log. (1-z);$$

posant  $z = 1$ , et retranchant ces deux expressions l'une de l'autre on obtient

$$\int_0^1 z^{\frac{ra'}{a}} dz (1-z)^{-1} - \int_0^1 z^r dz (1-z)^{-1} = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{r} \right\} - \left\{ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{\frac{ra'}{a}} \right\}$$

$$\text{cependant } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{r} = \log. r + C$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\frac{ra'}{a}} = \log. \frac{ra'}{a} + C,$$

et de là substituant on aura comme ci-dessus

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-a'x} - e^{-ax}}{x} = \log. a - \log. a'.$$

35. Soit proposée l'intégrale définie  $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx$ ;

on fera comme précédemment

$$\int_0^{\infty} dx e^{-a^2 x^2} = \int_0^{\infty} dx \left(1 - \frac{a^2 x^2}{r}\right)^r;$$

posant  $1 - \frac{a^2 x^2}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ , on obtient

$$a^2 x^2 = r \left(1 - u^{\frac{1}{r}}\right) = \log \frac{1}{u}, \text{ donc } x = \frac{1}{a} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\frac{2}{2}},$$

$$dx = -\frac{1}{2a} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u}, \text{ et par cette transformation}$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-a^2 x^2} = \frac{1}{2a} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ou d'après le n.}^{\circ} 21 \int_0^{\infty} dx e^{-a^2 x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi}.$$

36. Soit encore l'intégrale  $\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2 - a^2}{x^2}}$ ,

$$\text{ou bien } \int_0^{\infty} dx \left\{1 - \frac{1}{r} \left(\frac{x^4 + a^2}{x^2}\right)\right\}^r$$

il ne sera pas ici aussi facile de faire disparaître l'exposant  $r$ , qu'il l'a été dans l'exemple précédent; en général avant de substituer  $u^{\frac{1}{r}}$  à la place de la quantité élevée à la puissance  $r^{\text{me}}$ , il est nécessaire de préparer la fonction proposée par des transformations intermédiaires.

Avant tout il est bon de remarquer que puisqu'une expression exponentielle telle par exemple que  $e^a$  revient à

$(1 + \frac{a}{r})^r$ , on pourra écrire indifféremment

$$e^{a+b} = (1 + \frac{a+b}{r})^r, \text{ ou } e^{a+b} = e^a (1 + \frac{b}{r})^r$$

ou bien  $e^{a+b} = e^b (1 + \frac{a}{r})^r$ , enfin

$$e^{a+b} = (1 + \frac{a}{1})^r (1 + \frac{b}{1})^r.$$

Ainsi pour simplifier la fonction proposée on pourra suivant le cas faire sortir de la parenthèse quelques termes qui y seront renfermés, ou en faire entrer de ceux qui se trouvoient dehors.

37. Reprenant la formule  $\int_0^\infty dx \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left( \frac{x^4 + a^2}{x^2} \right) \right\}^r$ ,

on pourra d'après les remarques du n.<sup>o</sup> précédent l'écrire

$$e^{-2a} \int_0^\infty dx \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left( \frac{x^2 - a}{x} \right)^2 \right\}^r;$$

je fais  $\frac{x^2 - a}{x} = t$ , d'où  $x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 4a}$ ,

et  $dx = \frac{dt}{2} + \frac{t dt}{2\sqrt{t^2 + 4a}}$ ; aux limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$  correspondront celles  $t = -\infty$ ,  $t = \infty$ .

Ainsi l'on aura

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} = e^{-2a} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{2} \left( 1 - \frac{t^2}{r} \right)^r + e^{-2a} \int_{-\infty}^\infty \frac{t dt (1 - \frac{t^2}{r})^r}{2\sqrt{t^2 + 4a}};$$

le second terme de la fonction en  $t$  est telle qu'il conserve la même forme lorsqu'on y change en même tems  $t$ ,  $dt$  en  $-t$ ,  $-dt$  partant cette intégrale est nulle entre ces limites.



Faisant le même changement dans le premier terme celui-ci ne fera que changer de signe d'où il suit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2} \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r = \int_0^{\infty} dt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r;$$

il résulte de ces observations

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2-a^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^{\infty} dt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r,$$

posant comme à l'ordinaire  $1 - \frac{t^2}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ ,

ou  $t = r(1 - \frac{1}{u}) = \log. \frac{1}{u}$  on trouvera sans peine

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\frac{x^2-a^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2} \int_0^1 du \left(\log. \frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{2} \sqrt{\pi}.$$

(V. le calcul des probabilités de M. LA-PLACE première édition pag. 97-98).

38. On traitera d'une manière analogue la fonction

$$\int_0^{\infty} dx x^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)}, \text{ d'abord on la reduira à la forme}$$

$$\int_0^{\infty} dx x^{-\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{1}{r} \left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)\right\}^r$$

$$\text{ou bien } \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{n}} dx x^{-\frac{1}{2}} \left\{1 - \frac{1}{r} \left(\frac{x^2-2x+1}{2nx}\right)\right\}^r;$$

posant  $x = 2ny$ ,  $dx = 2ny dy$  on aura l'équation

$$\int_0^{\infty} dx x^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)} = 2e^{-\frac{1}{n}} \sqrt{2n} \int_0^{\infty} dy \left\{1 - \frac{1}{r} \left(\frac{2ny^2-1}{2ny}\right)\right\}^r,$$

si on fait ensuite  $\frac{2ny^2-1}{2ny} = t$ , d'où

$$y = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{2}{n}}; \text{ aux limites } y = 0, y = \infty$$

correspondront celles  $t = -\infty$ ,  $t = \infty$ , et on aura l'équation transformée,

$$\int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)} = 2 e^{-\frac{1}{n}\sqrt{2n}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{2} \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r + \int_{-\infty}^\infty \frac{tdt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r}{2\sqrt{t^2 - \frac{2}{n}}} \right\}$$

laquelle se réduit par les observations du n.<sup>o</sup> précédent à

$$\int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)} = 2 e^{-\frac{1}{n}\sqrt{2n}} \int_0^\infty dt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r,$$

et après avoir fait  $1 - \frac{t^2}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ , ou  $t^2 = r(1 - u^{\frac{1}{r}}) = \log \frac{1}{u}$ , on la ramenera aisement à la forme

$$\int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{x^2+1}{2nx}\right)} = 2 e^{-\frac{1}{n}\sqrt{2n}} \int_0^1 \frac{du}{2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

dont la valeur est égale à  $e^{-\frac{1}{n}\sqrt{2n\pi}}$ .

39. Pour dernier exemple des fonctions exponentielles

soit encore  $\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2+ax}$ ; d'abord je la change en

$$\int_{-\infty}^\infty dx \left\{ 1 - \frac{1}{r}(x^2 - ax) \right\}^r$$

$$\text{ou bien en } \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{a^2}{4}} dx \left\{ 1 - \frac{1}{r}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right\}^r;$$

je fais  $x - \frac{a}{2} = t$ , j'en déduis l'équation

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2+ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty dt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r,$$

laquelle d'après ce qu'on a vu revient à

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = 2e^{\frac{a^2}{4}} \int_0^{\infty} dt \left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r;$$

posant ensuite  $1 - \frac{t^2}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ , ou  $t^2 = \log. \frac{1}{u}$

on parviendra à

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \int_0^1 du \left(\log. \frac{1}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}.$$

On voit que ces transformations reviennent à changer la variable, et les limites de l'intégrale proposée de manière qu'elle prenne la forme des intégrales Euleriennes de la seconde espèce.

Lorsqu'on ne peut pas faire disparaître la puissance  $r^{me}$  du polynome renfermé entre la parenthèse, souvent on peut parvenir à l'intégrale cherchée par le développement du polynome en tout, ou seulement par rapport à quelqu'un de ses facteurs; ainsi par exemple dans la dernière intégrale au lieu de faire

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{1 - \frac{1}{r}(x^2-ax)\right\}^r,$$

on auroit pu écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left(1 + \frac{ax}{r}\right)^r$$

alors développant la puissance  $r^{me}$  du binome  $1 + \frac{ax}{r}$  suivant les puissances de la variable on parvient à l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left\{1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\};$$

maintenant il est facile de s'assurer par des intégrations partielles que les termes de la forme  $\int dx e^{-x^2} \cdot x^{2n+1}$  s'évanouissent entre les limites, et les autres de la forme  $\int dx e^{-x^2} \cdot x^{2n}$

se ramènent tous à  $\int dx e^{-x^2}$ , de sorte qu'après l'opération l'on parvient à l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{1.2.(4)^2} + \frac{a^6}{1.2.3.(4)^3} + \text{etc.} \right\}$$

ce qui revient évidemment à

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a^2}{4}} dx e^{-x^2} = 2 \int_0^{\infty} e^{\frac{a^2}{4}} dx e^{-x^2}$$

$$\text{ou} = 2 e^{\frac{a^2}{4}} \int_0^{\infty} dx \left( 1 - \frac{x^2}{r} \right)^r$$

posant  $1 - \frac{x^2}{r} = u^{\frac{1}{r}}$ , d'où  $x^2 = \log. \frac{1}{u}$

on aura enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2+ax} = 2 a^{\frac{a^2}{4}} \int_0^1 \frac{du}{2} \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

comme on a trouvé ci-dessus.

40. Je vais considérer maintenant quelques fonctions à exposants imaginaires, pour passer ensuite aux fonctions circulaires. Soient d'abord les deux intégrales

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-(mx-nx\sqrt{-1})} dx, \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-(mx+nx\sqrt{-1})} dx$$

(V. les exercices Tom. 1 pag. 367).

La première pourra se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \left(1 - \frac{mx}{r} + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r$$

et posant  $1 - \frac{mx}{r} + \frac{nx}{r} \sqrt{-1} = u^{\frac{1}{r}}$

aux limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$  on aura  $u = 1$ ,  $u = 0$  ;  
en effet l'expression précédente peut se changer en

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \left(1 - \frac{mx}{r}\right)^r \left(1 + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r$$

le facteur réel  $\left(1 - \frac{mx}{r}\right)^r = e^{-mx}$  est tel que lorsque  $x = 0$

il devient égal à l'unité ; ainsi que le second facteur ima-

ginaire  $\left(1 + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r$ , si on suppose ensuite que  $x$  augmente

de plus en plus, le facteur  $\left(1 - \frac{mx}{r}\right)^r$  sera toujours une quan-

tité positive mais d'autant plus petite que la valeur de  $x$   
sera plus grande, partant ce facteur se réduira à zéro

lorsque  $x = \infty$  tandis que le second reste imaginaire; d'où il

suit que le produit  $\left(1 - \frac{mx}{r}\right)^r \left(1 + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r$

est égal à l'unité si  $x = 0$ , et nul lorsque  $x = \infty$ , or

effectuant la multiplication, et effaçant le terme du second

ordre qui dispaeroit on aura simplement la quantité

$$\left(1 - \frac{mx}{r} + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r$$

laquelle sera  $= 1$  si  $x = 0$ , et nulle si  $x = \infty$ ,

ainsi posant  $1 - \frac{mx}{r} + \frac{nx}{r} \sqrt{-1} = u^{\frac{1}{r}}$

il est clair qu'aux limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$ , correspondront  
celles  $u = 1$ ,  $u = 0$ .

On déduit de l'équation précédente

$$mx - nx\sqrt{-1} = r(1 - u^{\frac{1}{r}}) = \log. \frac{1}{u}$$

$$\text{d'où } x = \frac{\log. \frac{1}{u}}{m - n\sqrt{-1}}, \quad dx = \frac{-du}{(m - n\sqrt{-1})u}$$

au moyen de ces substitutions l'intégrale proposée sera donnée par l'équation

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(mx - nx\sqrt{-1})} dx = \int_0^1 \frac{du (\log. \frac{1}{u})^{a-1}}{(m - n\sqrt{-1})^a} \quad (1)$$

changeant de même la seconde intégrale

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(mx + nx\sqrt{-1})} dx \quad \text{en}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \left(1 - \frac{mx}{r} - \frac{nx}{r}\sqrt{-1}\right)^r$$

$$\text{et posant } 1 - \frac{mx}{r} - \frac{nx}{r}\sqrt{-1} = u'^{\frac{1}{r}}$$

on démontrera de la même manière que pour  $x=0$ ,  $x=\infty$  on aura les valeurs  $u'=1$ ,  $u'=0$  et que cette intégrale sera donnée par l'équation

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(mx + nx\sqrt{-1})} dx = \int_0^1 \frac{du' (\log. \frac{1}{u'})^{a-1}}{(m + n\sqrt{-1})^a};$$

cependant, aux limites  $x=0$ ,  $x=\infty$ ,  $u$  et  $u'$  sont la même chose, on pourra donc effacer l'accent et faire

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(mx + nx\sqrt{-1})} dx = \int_0^1 \frac{du (\log. \frac{1}{u})^{a-1}}{(m + n\sqrt{-1})^a} \quad (2)$$

comme on l'aurait déduit de la première intégrale en changeant le signe de  $u$ .



41. Si on ajoute ensemble ces deux équations, puis qu'on les retranche l'une de l'autre l'on obtiendra

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx (e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}) e^{-mx} =$$

$$\left\{ \frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^a} + \frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^a} \right\} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1};$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx (e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}) e^{-mx} =$$

$$\left\{ \frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^a} - \frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^a} \right\} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

et à cause que  $e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}} = 2 \cos. nx$

$e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \sin. nx$ , on aura

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-mx} \cos. nx =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^a} + \frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^a} \right\} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1};$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-mx} \sin. nx =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^a} - \frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^a} \right\} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}.$$

Soit maintenant d'après M. LE-GENDRE (exercices T. I p. 368)

$\frac{n}{m} = \tan. \theta$ ,  $m^2 + n^2 = h^2$ , on changera ces équations en

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-mx} \cos. nx = \frac{\cos. a\theta}{h^a} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-mx} \sin. nx = \frac{\sin. a\theta}{h^a} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1} \quad (A)$$

et si on suppose  $m = 0$  d'où  $h = n$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$

on aura par induction

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx &= \frac{1}{n^a} \cos. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}, \\ \int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx &= \frac{1}{n^a} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}.\end{aligned}\quad (B)$$

Des équations (1) (2) du n.<sup>o</sup> précédent, on déduit aussi par induction, en supposant  $m = 0$ , les intégrales

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{nx\sqrt{-1}} &= \int_0^1 \frac{du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}}{(-n\sqrt{-1})^a} \\ \int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}} &= \int_0^1 \frac{du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}}{(n\sqrt{-1})^a}.\end{aligned}\quad (C)$$

42. Cependant si on vouloit déterminer directement les intégrales (B) ou (C), où tomberoit dans le cas de la méthode fondée sur le passage du réel à l'imaginaire, employée d'abord par EULER dans son calcul intégral, et considérablement étendue ensuite par M. LA-PLACE (V. le 8<sup>e</sup> vol. du journal de l'école polytechnique).

On sait que lorsque les résultats sont exprimés en quantités indéterminées, la généralité de la notation algébrique embrasse tous les cas soit réels, soit imaginaires; or ce passage du réel à l'imaginaire peut encore avoir lieu même lorsque les résultats sont exprimés en quantités déterminées.

Soit d'abord proposée l'intégrale définie  $\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{nx\sqrt{-1}}$ ,

ou bien  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \left( 1 + \frac{nx}{r} \sqrt{-1} \right)^r$ , je ferai  $x = t \sqrt{-1}$ ,

et supposant qu'aux limites  $x=0$ ,  $x=\infty$  on ait pareillement

$t = 0$ ,  $t = \infty$ , il vient

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{nx\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^a \int_0^\infty t^{a-1} dt \left(1 - \frac{nt}{r}\right)^r,$$

maintenant posant comme à l'ordinaire

$$1 - \frac{nt}{r} = u^{\frac{1}{r}} \text{ d'où } t = \frac{1}{n} \cdot r \left(1 - u^{\frac{1}{r}}\right) = \frac{1}{n} \log. \frac{1}{u},$$

$dt = -\frac{du}{nu}$ ; par ces substitutions on aura

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{nx\sqrt{-1}} = \frac{(\sqrt{-1})^a}{n^a} \int_0^1 du \left(\log. \frac{1}{u}\right)^{a-1};$$

si on change aussi l'intégrale  $\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}}$

en  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \left(1 - \frac{nx\sqrt{-1}}{r}\right)^r$  ensuite qu'on fasse  $x = \frac{t'}{\sqrt{-1}}$  et

qu'on suppose  $t' = 0$ ,  $t' = \infty$  en même tems que  $x = 0$ ,  $x = \infty$ , on aura de même

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}} = \frac{1}{(\sqrt{-1})^a} \int_0^\infty t'^{a-1} dt' \left(1 - \frac{nt'}{r}\right)^r,$$

et de là après avoir fait  $1 - \frac{nt'}{r} = u'^{\frac{1}{r}}$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}} = \frac{1}{(n\sqrt{-1})^a} \int_0^1 du' \left(\log. \frac{1}{u'}\right)^{a-1}$$

dans laquelle on pourra effacer l'accent;  $u$  et  $u'$  étant la même chose aux limites; on voit que ces équations coïnci-

dent avec celles (C) puisque  $\frac{(\sqrt{-1})^a}{n^a} = \frac{1}{(-n\sqrt{-1})^a}$ .

43. Le cas des résultats exprimés en quantité déterminées, peut se ramener aisement à celui où les résultats sont exprimés en quantités indéterminées; pour cela au lieu

de considérer les deux intégrales proposées, on considérera plus généralement

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nkx} \quad \text{ou bien} \quad \int_0^\infty x^{a-1} dx \left(1 - \frac{nkx}{r}\right)^r;$$

après avoir obtenu cette dernière intégrale, on fera successivement  $k = -\sqrt{-1}$ ,  $k = \sqrt{-1}$ , alors les deux valeurs, qui en résultent, coïncideront avec les deux intégrales proposées.

En effet posant suivant les règles établies

$$1 - \frac{nkx}{r} = u^{\frac{1}{r}}, \quad \text{on trouve}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nkx} = \frac{1}{n^a k^a} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{a-1},$$

par conséquent on aura les deux équations

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{nx\sqrt{-1}} = \frac{1}{(-n\sqrt{-1})^a} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{a-1}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}} = \frac{1}{(n\sqrt{-1})^a} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{a-1},$$

où les équations (C) du n.º 41.

44. Si on ajoute ensemble ces deux équations, puis qu'on les retranche l'une de l'autre on trouvera

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx = \frac{1}{2n^a} \{(\sqrt{-1})^a + (\sqrt{-1})^{-a}\} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{a-1}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx = \frac{1}{2n^a \sqrt{-1}} \{(\sqrt{-1})^a - (\sqrt{-1})^{-a}\} \int_0^1 du \left(\log \frac{1}{u}\right)^{a-1},$$

maintenant l'on peut faire

$$\sqrt{-1} = \cos. \frac{\pi}{2} + \sin. \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}$$

$$\text{donc } (\sqrt{-1})^a = \cos. \frac{a\pi}{2} + \sin. \frac{a\pi}{2} \sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{-a} = \cos. \frac{a\pi}{2} - \sin. \frac{a\pi}{2} \sqrt{-1},$$

par ces nouvelles substitutions on réduit les équations précédentes à la forme

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx = \frac{1}{n^a} \cos. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx = \frac{1}{n^a} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

c'est-à-dire aux équations (B) du n.<sup>o</sup> 41.

Nous sommes parvenus à ces résultats, en partant des intégrales  $\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{ax\sqrt{-1}}$ ,  $\int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-nx\sqrt{-1}}$

mais il auroit été facile d'y parvenir directement au moyen des formules connues

$$nx \sqrt{-1} = \log. \{ \cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1} \}$$

$$-nx \sqrt{-1} = \log. \{ \cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1} \}$$

car par les formules de LA-GRANGE on les changera en

$$nx \sqrt{-1} = r \{ (\cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1})^{\frac{1}{r}} - 1 \}$$

$$-nx \sqrt{-1} = r \{ (\cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1})^{\frac{1}{r}} - 1 \}$$

d'où il est aisé de conclure

$$\cos. nx = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{nx\sqrt{-1}}{r} \right)^r + \left( 1 - \frac{nx\sqrt{-1}}{r} \right)^r \right\}$$

$$\sin. nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \left( 1 + \frac{nx\sqrt{-1}}{r} \right)^r - \left( 1 - \frac{nx\sqrt{-1}}{r} \right)^r \right\}$$

substituant ces valeurs dans les fonctions

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx, \int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx, \text{ on aura toujours}$$

à évaluer les mêmes intégrales que supérieurement.

45. Quelque ingénieuse que soit cette méthode d'intégration, fondée sur le passage du réel à l'imaginaire, il faut avouer d'après M. Poisson (journal de l'école polytechnique Tom. 9 pag. 219) qu'elle a besoin d'une démonstration plus rigoureuse pour être employée avec sûreté, de sorte que les résultats que l'on obtient par son moyen ne peuvent être admis qu'autant qu'ils seront confirmés d'ailleurs rigoureusement.

La généralité de la notation algébrique par laquelle il est permis de donner des valeurs quelconques aux quantités que la solution laisse indéterminée a lieu sans aucune exception pour les intégrales indéfinies, mais il n'en est pas de même relativement aux intégrales définies dont les valeurs supposent le plus souvent des conditions entre les quantités indéterminées; ainsi par exemple on a évidemment

$\int_0^\infty e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$ , cependant par la généralité de la notation algébrique on ne pourroit pas en conclure

$\int_0^\infty e^{nx} dx = -\frac{1}{n}$  par le changement du signe de  $n$ , car la première valeur n'a lieu qu'avec la condition que  $n$  soit positif, et l'on voit que  $\int_0^\infty e^{nx} dx = \infty$ .

46. Pour éviter les difficultés que présente cette méthode d'intégration de laquelle dépend la solution directe des fonctions  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx$ ,  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx$ , on a



commencé ci-dessus par déterminer rigoureusement celles

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-mx} dx \cos. nx, \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-mx} dx \sin. nx \quad (n.^{\circ} 41),$$

ensuite par induction on a déduit les premières en supposant  $m = 0$ .

Il paroît cependant que cette supposition n'a pas moins besoin de démonstration que la méthode elle-même fondée sur le passage du réel à l'imaginaire. En effet pour parvenir aux équations (A) du numéro cité après avoir fait  $e^{-mx \pm nx\sqrt{-1}} = u$  on a supposé qu'aux limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$ , on devoit avoir les valeurs correspondantes  $u = 1$ ,  $u = 0$ , or d'après ce qu'on a vu (n.<sup>o</sup> 40) cela n'est vrai qu'autant que  $m > 0$ , il peut donc pour le moins être douteux si la supposition de  $m = 0$  est légitime pour passer comme on l'a fait aux équations (B) en conservant les mêmes limites à la variable  $u$ .

On parvient aussi rigoureusement aux équations (A) par l'ingénieuse méthode de M. Poisson (journal de l'école polytechnique Tom. 9) en supposant qu'aux limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$ , le produit  $e^{-mx} x^a$  est nul, de là on passe aux équations (B) par la supposition de  $m = 0$ , mais il se présente ici la même difficulté que précédemment, car le produit  $e^{-mx} x^a$  ne peut être nul à ces limites qu'autant que  $m > 0$ .

47. Réfléchissant sur cette méthode d'intégration fondée sur le passage du réel à l'imaginaire par laquelle nous sommes arrivé directement aux équations (B), je trouve

que son succès tient à l'hypothèse que cette méthode introduit implicitement qu'à la limite  $x=\infty$  on a  $\sin. \infty=0$ ,  $\cos. \infty=0$ .

Pour se convaincre de la vérité de cette proposition il suffit de se rappeler que nous avons supposé les équations

$$nt = -nx \sqrt{-1} = \log. \frac{1}{u}, \quad nt' = nx \sqrt{-1} = \log. \frac{1}{u'},$$

dans lesquelles à la limite  $x=\infty$  on doit faire  $t=t'=\infty$ ,  $u=u'=0$  : maintenant on sait que

$$\begin{aligned} -nx \sqrt{-1} &= -\log. \{ \cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1} \} \\ nx \sqrt{-1} &= -\log. \{ \cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1} \}, \end{aligned}$$

$$\text{ainsi on aura } u = \cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1}$$

$$u' = \cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1},$$

et lorsque  $x=\infty$ , ces équations se changeront en

$$0 = \cos. n\infty + \sin. n\infty \sqrt{-1}$$

$$0 = \cos. n\infty - \sin. n\infty \sqrt{-1}$$

lesquelles ne peuvent avoir lieu à moins que  $\cos. n\infty=0$ ,  $\sin n\infty=0$ .

48. Comme cette supposition, analytiquement parlant, n'est pas exacte, la méthode ne pourra pas être appliquée indistinctement à toute sorte de fonctions, mais il faudra que la fonction proposée en soit susceptible. Cette méthode seroit rigoureusement applicable aux fonctions

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-mx} dx \cos. nx, \quad \int_0^\infty x^{a-1} dx e^{-mx} \sin. nx,$$

car si on les intègre par partie, il sera facile de s'assurer qu'à cause du facteur  $e^{-mx}$  qui est nul lorsque  $x=\infty$ ,

la supposition de  $\cos. \infty = 0$ ,  $\sin. \infty = 0$  est permise. Cette méthode sera encore applicable aux fonctions

$\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx$ ,  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx$  toutes les fois que l'exposant  $a-1$  sera une quantité négative. Considérons par exemple  $\int_0^\infty \frac{dx \cos. x}{x}$ ; au moyen de l'intégration par partie on obtient

$$\int \frac{dx \cos. x}{x} = \frac{\sin. x}{x} - \frac{\cos. x}{x^2} - \frac{2 \sin. x}{x^3} + \text{etc.}$$

or il est clair par la forme de ces termes que lorsque  $x = \infty$  on a  $\frac{\sin. \infty}{\infty} = 0$ ,  $\frac{\cos. \infty}{\infty^2} = 0$  etc. ainsi rien n'empêche de supposer si l'on veut  $\sin. \infty = 0$ ,  $\cos. \infty = 0$ .

49. Considérons plus particulièrement  $\int_0^\infty dx \sin. nx$ , où le cas de  $a-1=0$ ; que l'on construise la courbe dont l'équation est  $y = \sin. nx$ , alors  $\int_0^\infty dx \sin. nx$  représentera l'aire comprise entre les limites  $x=0$ ,  $x=\infty$ , et supposant que l'aire commence avec  $x$  on aura

$$\int dx \sin. nx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos. nx \text{ d'après cette équation, et}$$

par l'inspection même d'une figure il est clair que l'aire comprise entre ces limites est absolument indéterminée, car elle dépend de la valeur de  $\cos. n\infty$  laquelle peut être une valeur quelconque comprise entre l'unité et zéro. Cependant si l'on veut supposer  $\cos. n\infty = 0$ , il en résulte

$\int_0^{\infty} dx \sin. nx = \frac{1}{n}$  comme on le trouve par la méthode du passage du réel à l'imaginaire.

50. Pour donner un exemple de  $a - 1 > 0$ , soit proposée  $\int_0^{\infty} x^2 dx \sin. nx$ ; évaluant cette intégrale au moyen des formules (B) du n.<sup>o</sup> 41 on a

$$\int_0^{\infty} x^2 dx \sin. nx = \frac{1}{n^3} \sin. \frac{3\pi}{2} (1.2) = -\frac{2}{n^3}.$$

Or l'on parviendra au même résultat par la voie ordinaire de l'intégration par partie pourvu qu'on adopte la supposition de  $\cos. \infty = 0$ ,  $\sin. \infty = 0$ ; en effet

$$\int x^2 dx \sin. nx = -\frac{x^2 \cos. nx}{n} + \frac{2x \sin. nx}{n^2} + \frac{2 \cos. nx}{n^3},$$

et d'après cette supposition il viendra

$$\int_0^{\infty} x^2 dx \sin. nx = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\infty^2 \cdot 0}{n} + \frac{2\infty \cdot 0}{n^2} + \frac{2 \cdot 0}{n^3} \\ + \frac{0^2 \cdot 1}{n} - \frac{2 \cdot 0 \cdot 0}{n^2} - \frac{2 \cdot 1}{n^3} \end{array} \right\} = -\frac{2}{n^3}.$$

51. Lorsque la quantité  $a$  est négative les équations (B) se changent en

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{x^{a+1}} = n^a \cos. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin. nx}{x^{a+1}} = n^a \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1};$$

ces équations se présentent sous la forme indéterminée  $0 \cdot \infty$ , la première si  $a$  est un des nombres de la suite  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k+1$ , la seconde si  $a$  est un des nombres

0, 2, 4... 2k puisque  $\cos. \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$ ,  $\sin. \frac{2k\pi}{2} = 0$ , et

$\int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1} = \infty$ ; mais une circonstance remarquable

c'est que cette seconde équation est en elle même toujours indéterminée. Pour le voir bien clairement je reprend les équations du n.° 44 dans lesquelles après avoir changé  $a$

en  $-a$  et fait  $\int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1} = \infty$ , on obtient

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos. nx}{x^{a+1}} = \frac{n^a}{2} \left\{ (\sqrt{-1})^{-a} + (\sqrt{-1})^a \right\} \infty$$

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin. nx}{x^{a+1}} = \frac{n^a}{2\sqrt{-1}} \left\{ (\sqrt{-1})^{-a} - (\sqrt{-1})^a \right\} \infty.$$

Or pour arriver à ces résultats on a fait

$-x\sqrt{-1} = \log. \frac{1}{u}$  et  $x\sqrt{-1} = \log. \frac{1}{u'}$  où lorsque  $x = \infty$ , il

faut poser  $u = u' = 0$ , on tire de là les deux équations

$$-\infty\sqrt{-1} = \infty, \quad \infty\sqrt{-1} = \infty,$$

et en observant que  $-\infty\sqrt{-1} = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}$  il est aisé de conclure

$$\left\{ (\sqrt{-1})^{-a} - (\sqrt{-1})^a \right\} \cdot \infty = \infty - \infty = 0;$$

donc au lieu de poser

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ (\sqrt{-1})^{-a} - (\sqrt{-1})^a \right\} \infty = -\sin. \frac{a\pi}{2} \cdot \infty$$

conformément au n.° cité, on pourroit écrire également

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ (\sqrt{-1})^{-a} - (\sqrt{-1})^a \right\} \cdot \infty = 0;$$

comme rien ne fixe ici laquelle de ces deux valeurs on doit

choisir, il résulte que la seconde des équations supérieures est évidemment indéterminée.

52. On évite les cas indéterminés de la seconde équation (B) en la faisant dépendre de la première qui n'est pas sujette aux mêmes inconvénients; pour cela il suffit de remarquer que

$$\int \frac{dx \cos nx}{x^a} = \frac{\sin nx}{nx^a} + \frac{n}{n} \int \frac{dx \sin nx}{x^{a+1}}$$

ou à cause qu'entre les limites  $x=0$ ,  $x=\infty$ , on a  $\frac{\sin nx}{nx^a} = 0$  il vient

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x^{a+1}} = \frac{n}{a} \int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^a},$$

mais par la première des équations (B)

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^a} = n^{a-1} \cos. (a-1) \frac{\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a}$$

ou, puisque  $\cos. (a-1) \frac{\pi}{2} = \sin. \frac{a\pi}{2}$ , on aura

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^a} = n^{a-1} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a}$$

et par cette substitution on obtient l'équation

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x^{a+1}} = \frac{n^a}{a} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a}.$$

Quant à l'indétermination de la forme  $0 \cdot \infty$  relative à la première des équations (B) elle ne peut être d'aucune conséquence à cause que  $\int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^{a+1}}$  est toujours infinie lorsque  $a \geq 0$ , comme on le verra ci-après. D'après ces observations on aura pour la solution complète des fonctions  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \cos. nx$ ,  $\int_0^\infty x^{a-1} dx \sin. nx$  les trois équations



$$\int_0^{\infty} x^{a-1} dx \cos. nx = \frac{1}{n^a} \cos. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} dx \sin. nx = \frac{1}{n^a} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin. nx}{x^{a+1}} = \frac{n^a}{a} \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a},$$

lesquelles coïncident avec celles de M. LA-PLACE (journal de l'école polytechnique Tom. 8 pag. 250).

53. Pour faire quelques applications de ces formules nous allons donner à  $a$  successivement différentes valeurs

si  $a=1$  on tirera des deux premières équations

$$\int_0^{\infty} dx \cos. nx = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

$$\int_0^{\infty} dx \sin. nx = \frac{1}{n}.$$

si on fait  $a = \frac{1}{2}$  il viendra des deux premières

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{2n}} \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin. nx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{2n}} \sqrt{\pi},$$

si on suppose  $a=0$  on déduit des deux premières

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{x} = 1 \cdot \infty = \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin. nx}{x} = 0 \cdot \infty = \frac{\pi}{2},$$

la seconde valeur reste indéterminée mais en recourant à la troisième équation, et supposant  $a$  infiniment petit, il viendra

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2};$$

posons en dernier lieu  $a = -\frac{1}{2}$ , on aura par les deux premières équations

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{n} \cos. \frac{\pi}{4} \cdot \infty = \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x\sqrt{x}} = -\sqrt{n} \sin. \frac{\pi}{4} \cdot \infty = *$$

la première valeur est exacte, mais la seconde équation d'après le n.º 51 est ici douteuse, et il faudra recourir à la troisième de laquelle on déduit

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x\sqrt{x}} = 2\sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} = \sqrt{2n\pi}.$$

Enfin il sera facile de s'assurer que lorsque  $a > 0$  on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{x^{a+1}} = \infty; \text{ d'abord par la première équation on}$$

obtient toujours dans ce cas  $\int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{x^{a+1}} = \infty$ , pourvu

que  $a$  ne soit pas un des nombres de la suite 1. 3. 5. 7. etc.  $2k-1$ , et lorsque  $a$  est un de ces nombres alors la

même équation donne  $\int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{x^{a+1}} = 0 \cdot \infty = \frac{0}{0}$ , mais dans

cette circonstance la fonction prend la forme  $\int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{x^{2k}}$ ,

et par des intégrations par parties on s'assurera aisément qu'elle est toujours infinie quelque soit le nombre  $k$ . En effet

$$\int \frac{dx \cos nx}{x^2} = -\frac{\cos nx}{x} - n \int \frac{dx \sin nx}{x}$$

or entre les limites  $x = 0$ ,  $x = \infty$  on a  $-\frac{\cos.nx}{x} = \frac{1}{0}$  ;

$$\text{d'ailleurs } \int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

d'où il suit

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos.nx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{n\pi}{2} = \infty \quad (1)$$

Maintenant on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{dx \cos.nx}{x^{2k}} &= -\frac{\cos.nx}{(2k-1)x^{2k-1}} + \frac{n \sin.nx}{(2k-1)(2k-2)x^{2k-2}} \\ &\quad - n^2 \int \frac{dx \cos.nx}{(2k-1)(2k-2)x^{2k-2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

de ces équations (1) (2) il résulte clairement que si on pose pour  $k$  un des nombres de la suite 1. 2. 4. 5. etc. à l'infini on aura toujours

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos.nx}{x^{2k}} = \infty, \text{ partant la valeur de } \int_0^\infty \frac{dx \cos.nx}{x^{a+1}}$$

sera toujours infinie dans le cas de  $a \leq 0$  ; de plus à cause que l'on a trouvé ci-dessus

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{x^{a+1}} = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{dx \cos.nx}{x^a}$$

on aura de même  $\int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{x^{a+1}} = \infty$  dans le cas de  $a \geq 1$ .

Cependant en effectuant les opérations indiquées on reconnoîtra tout-de-suite que l'ordre de ces infinis varie suivant la valeur de  $a$  ( V. les deux intéressants mémoires de MM. BIDONE et PLANA insérés dans cette collection Académique années 1812 , 1816 ).

54. De l'équation

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} dx \cos. nx = \frac{1}{n^a} \cos. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{a-1}$$

on a déduit

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{x} = \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-1} = \infty,$$

on aura également

$$\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. n'x}{x} = \int_0^1 du' \left( \log. \frac{1}{u'} \right)^{-1} = \infty,$$

cependant on ne doit pas conclure

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} (\cos. nx - \cos. n'x) = \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-1} - \int_0^1 du' \left( \log. \frac{1}{u'} \right)^{-1} = 0$$

car la différence de ces deux infinis pourroit bien être une quantité finie.

En effet on a par le n.° 26

$$\int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-1} = -A - \log. \left( \log. \frac{1}{u} \right)$$

dans laquelle il faut faire  $u = 1$ ; posant ensuite d'après

le n.° 43  $\log. \frac{1}{u} = nkx$ , il viendra

$$\int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-1} = -A - \log. n - \log. kx$$

$$\int_0^1 du' \left( \log. \frac{1}{u'} \right)^{-1} = -A - \log. n' - \log. kx;$$

dans ces équations la supposition de  $x = 0$  rend les intégrales infinies, comme cela doit être, mais leur différence est finie, et telle que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \{ \cos. nx - \cos. n'x \} = \log. n' - \log. n.$$

L'intégrale  $\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x} = \frac{\pi}{2}$  du n.° 53

peut encore s'obtenir d'une autre manière, car reprenant l'équation

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ \left(1 + \frac{nx\sqrt{-1}}{r}\right)^r - \left(1 - \frac{nx\sqrt{-1}}{r}\right)^r \right\}$$

on pourra l'écrire

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}} \right\}$$

laquelle étant comparée à celle du n.° 34

$$\text{savoir } \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ e^{-ax} - e^{-a'x} \right\} = \log a - \log a'$$

$$\text{on aura tout-de-suite } \int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x} = -\frac{\log(-1)}{2\sqrt{-1}}$$

et à cause de  $\log(-1) = \pm \pi \sqrt{-1}$ , il viendra

$$\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x} = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ ou bien } = \frac{\pi}{2}$$

puisque la fonction  $\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x}$  est toujours positive. On

parviendrait de même à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \{ \cos. nx - \cos. n'x \} = \log. n' - \log. n;$$

en effet on aura

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \{ \cos. nx - \cos. n'x \} = & \int_0^\infty \frac{dx}{2x} \left\{ e^{nx\sqrt{-1}} - e^{n'x\sqrt{-1}} \right\} \\ & + \int_0^\infty \frac{dx}{2x} \left\{ e^{-nx\sqrt{-1}} - e^{-n'x\sqrt{-1}} \right\} \end{aligned}$$

et comparant les termes du second nombre de cette équation

$$\text{à la formule } \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ e^{-ax} - e^{-a'x} \right\} = \log. a - \log. a' \text{ il vient}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} (\cos. nx - \cos. n'x) = \log. n' - \log. n.$$

55. Soit la fonction  $\int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{x^2 + b^2}$  dont la valeur a été donnée la première fois par M. LAPLACE ; si on développe la fraction  $\frac{1}{x^2 + b^2}$  suivant les puissances descendantes de  $x$ , il est facile de voir que tous les termes de cette intégrale sont susceptibles de la supposition de  $\cos. \infty = 0$ ,  $\sin. \infty = 0$ , ainsi on pourra la traiter par la méthode du passage du réel à l'imaginaire, ou du moins la faire dépendre d'autres intégrales déjà obtenues par cette méthode ; pour cela faisons

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{dx \cos. nx}{x^2 + b^2}$$

on en déduira par des différentiations successives

$$\frac{dZ}{dn} = - \int_0^{\infty} \frac{x dx \sin. nx}{x^2 + b^2}$$

$$\frac{d^2Z}{dn^2} = - \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx \cos. nx}{x^2 + b^2}$$

d'où résulte l'équation

$$\frac{d^2Z}{dn^2} - b^2 Z = - \int_0^{\infty} dx \cos. nx,$$

mais par la méthode du passage du réel à l'imaginaire on

$$\text{a trouvé } \int_0^{\infty} dx \cos. nx = 0,$$

par conséquent  $\frac{d^2Z}{dn^2} - b^2 Z = 0$ , dont l'intégrale est

$$Z = C e^{bn} + C' e^{-bn} ;$$



il ne reste plus qu'à déterminer les constantes arbitraires; j'observe d'abord que si on suppose  $n = 0$  la proposée se change en  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}$ , d'où il suit  $C + C' = \frac{\pi}{2b}$ , et éliminant  $C'$  il viendra  $Z = C \{ e^{bn} - e^{-bn} \} + \frac{\pi}{2b} e^{-bn}$ .

Pour déterminer l'autre constante il suffit de remarquer que par la même supposition de  $n = 0$  on a  $\frac{dZ}{dn} = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{en effet } \frac{dZ}{dn} = - \int_0^\infty \frac{x dx \sin nx}{x^2+b^2} = - \int_0^\infty \frac{nx dx \sin nx}{nx^2+nb^2}$$

et plus  $n$  deviendra petit plus cette fonction approchera de

$$\int_0^\infty \frac{nx dx \sin nx}{nx^2} \text{ ou de } - \int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x}, \text{ laquelle est toujours égale à } -\frac{\pi}{2} \text{ indépendamment de la valeur de } n.$$

$$\text{mais on a encore } \frac{dZ}{dn} = Cb \{ e^{bn} + e^{-bn} \} - \frac{\pi}{2} e^{-bn},$$

$$\text{donc faisant } n = 0 \text{ l'on aura } -\frac{\pi}{2} = 2Cb - \frac{\pi}{2}$$

d'où il suit  $C = 0$  et de là

$$Z = \int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{2b} e^{-bn}.$$

56. Étant proposée la fonction  $\int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^2-b^2}$ , que

M. BIDONE a donné le premier, on fera

$$Y = \int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^2-b^2},$$

et par des différentiations successives il vient

$$\frac{dY}{dn} = - \int_0^\infty \frac{x dx \sin nx}{x^2 - b^2}$$

$$\frac{d^2 Y}{dn^2} = - \int_0^\infty \frac{x^2 dx \cos nx}{x^2 - b^2}$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{d^2 Y}{dn^2} + b^2 Y = 0$$

dont l'intégrale  $Y = C e^{bn\sqrt{-1}} + C' e^{-bn\sqrt{-1}}$ ;

si on suppose  $n = 0$  la proposée se change en

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - b^2} = 0, \text{ d'où } 0 = C + C', \text{ et éliminant } C' \text{ on aura}$$

$$Y = C \{ e^{bn\sqrt{-1}} - e^{-bn\sqrt{-1}} \};$$

maintenant par cette même supposition de  $n = 0$  on a encore comme dans le n.º précédent

$$\frac{dY}{dn} = - \int_0^\infty \frac{x dx \sin nx}{x^2 - b^2} = - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et d'autre part } \frac{dY}{dn} = Cb\sqrt{-1} \{ e^{bn\sqrt{-1}} + e^{-bn\sqrt{-1}} \}$$

d'où il suit, en faisant  $n = 0$

$$-\frac{\pi}{2} = 2Cb\sqrt{-1}, \text{ ou } C = -\frac{\pi}{4b\sqrt{-1}};$$

posant cette valeur de la constante  $C$  dans l'expression de  $Y$ , il viendra

$$Y = \int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{x^2 - b^2} = -\frac{\pi}{4b\sqrt{-1}} \{ e^{bn\sqrt{-1}} - e^{-bn\sqrt{-1}} \}$$

$$\text{ou } Y = -\frac{\pi}{2b} \sin. bn.$$

57. Cette dernière intégrale définie est fondée sur l'équation

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - b^2} = 0 \text{ comme on l'obtient en intégrant d'abord}$$

depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x = b$ , et ensuite depuis  $x = b$  jusqu'à  $x = \infty$ ; autrement si on fait  $x = b \left( \frac{1+2z}{1-2z} \right)$ ,  $dx = \frac{4b dz}{(1-2z)^2}$ ; aux limites  $x=0$   $x=\infty$  correspondront celles  $z = -\frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{1}{2}$  et l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-b^2}$  sera changée en  $\frac{1}{2b} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z}$ , laquelle est évidemment nulle; en effet  $\int \frac{dz}{z}$  représente l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, dont les deux branches sont semblables, et égales de part et d'autre de l'origine, mais situées en sens contraire d'où il suit que cette aire sera toujours nulle entre les limites  $\pm x$ .

58. Je regarde ici l'intégrale définie, d'une fonction différentielle proposée comme étant égale à la somme de tous les élémens de cette intégrale compris entre des limites donnés.

En général si on a  $\int f(x) dx = F(x)$ , l'intégrale définie, ou la somme des élémens de l'intégrale entre les limites  $x=a$ ,  $x=b$  sera exprimé par

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  pourvu toute fois qu'entre ces limites  $f(x)$  ne devienne pas infinie, ou que la continuité des élémens ne soit pas interrompue, (V. LA-GRANGE 12<sup>e</sup> cahier de l'école polytechnique, et M. POISSON 18<sup>e</sup> cahier) lorsque  $f(x)$  devient infinie entre ces limites, alors l'expression analytique  $F(b) - F(a)$  ne sauroit plus donner la somme cherchée des élémens de l'intégrale, et on ne peut

l'obtenir qu'en partageant cette somme entre plusieurs intervalles pour lesquelles n'ait plus lieu la circonstance de  $f(x) = \infty$ . Cependant cette même expression analytique peut servir à faire connoître d'autres intégrales définies; ainsi par

exemple pour évaluer  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+b^2}$  on peut faire dépendre

cette intégrale de  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-b^2}$ , mais comme la proposée peut

s'obtenir sans aucun partage de l'intégrale, il faudra opérer d'une manière analogue sur la seconde, alors il viendra

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-b^2} = \frac{1}{2b} \log. (-1) \text{ et à cause de } \log. (-1) =$$

$\pm \pi \sqrt{-1}$  on aura

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-b^2} = \pm \frac{\pi \sqrt{-1}}{2b}$$

changeant dans cette dernière équation  $b$ , en  $b \sqrt{-1}$  il

vient  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+b^2} = \pm \frac{\pi}{2b}$ , ou  $= \frac{\pi}{2b}$  puisque  $\int \frac{dx}{x^2+b^2}$  est

toujours une quantité positive entre  $x=0$ ,  $x=\infty$ .

59. Si on cherche encore à déterminer les deux intégrales définies  $\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{\sin ax}$ ,  $\int_0^\infty \frac{dx \sin nx}{x \cos ax}$

il sera facile de s'assurer qu'elles se réduisent toutes les deux à zéro; d'abord la première pourra s'écrire

$$\int_0^\infty \frac{dx \left\{ \left(1 + \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r - \left(1 - \frac{nx}{r} \sqrt{-1}\right)^r \right\}}{\left\{ \left(1 + \frac{ax}{r} \sqrt{-1}\right)^r - \left(1 - \frac{ax}{r} \sqrt{-1}\right)^r \right\}}$$

ou bien 
$$\int_0^\infty \frac{dx \left\{ \left(1 - \frac{akx}{r}\right)^r - \left(1 + \frac{nkx}{r}\right)^r \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{akx}{r}\right)^r - \left(1 + \frac{nkx}{r}\right)^r \right\}}$$

pourvu qu'on fasse après l'intégration  $k = -\sqrt{-1}$ , soit

$$1 - \frac{nkx}{r} = u^{\frac{1}{r}}, \text{ d'où } x = r \left( \frac{1 - u^{\frac{1}{r}}}{nk} \right),$$

c'est-à-dire  $x = \frac{1}{nk} \log. \frac{1}{u}$ , et  $dx = -\frac{du}{nku}$ ;

il viendra  $akx = \frac{a}{n} \log. \frac{1}{u} = \log. \frac{1}{u^{\frac{a}{n}}}$ ,

ou  $akx = r \left( 1 - u^{\frac{a}{rn}} \right)$ , partant

$$1 - \frac{akx}{r} = u^{\frac{a}{rn}} \text{ et changeant } a \text{ en } -a \text{ on aura}$$

$$1 + \frac{akx}{r} = u^{\frac{-a}{rn}}; \text{ par ces substitutions il vient}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx \left(1 - \frac{nkx}{r}\right)^r}{\left(1 - \frac{akx}{r}\right)^r - \left(1 + \frac{nkx}{r}\right)^r} = \frac{1}{nk} \int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{a}{n}} - u^{\frac{-a}{n}}}$$

ensuite si on change  $n$  en  $-n$  on aura également

$$\int_0^\infty \frac{dx \left(1 + \frac{nkx}{r}\right)^r}{\left(1 - \frac{akx}{r}\right)^r - \left(1 + \frac{nkx}{r}\right)^r} = -\frac{1}{nk} \int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{-a}{n}} - u^{\frac{a}{n}}}$$

ces deux équations étant retranchées l'une de l'autre, on aura zero pour l'intégrale cherchée. Les mêmes transformations étant faites dans la seconde formule on trouvera

de la même manière  $\int_0^\infty \frac{dx \sin ax}{x \cos ax} = 0.$

60. Au moyen des intégrales du n.<sup>o</sup> précédent, il sera facile d'obtenir les suivantes

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \frac{\sin.nx}{\sin.ax}, \quad \int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^2} \frac{\cos.nx}{\sin.ax}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} \frac{\sin.nx}{\cos.ax}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \frac{\cos.nx}{\cos.ax}$$

je fais pour la première

$$Y = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \frac{\sin.nx}{\sin.ax},$$

et différenciant par rapport à  $n$  deux fois de suite on a

$$\frac{dY}{dn} = \int_0^\infty \frac{x dx \cos.nx}{(1+x^2) \sin.ax}$$

$$\frac{d^2Y}{dn^2} = - \int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{\sin.ax} + \int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{(1+x^2) \sin.ax}$$

de là il résulte

$$\frac{d^2Y}{dn^2} - Y = - \int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{\sin.ax};$$

ainsi à cause que  $\int_0^\infty \frac{dx \sin.nx}{\sin.ax} = 0$  on aura l'équation

$$\frac{d^2Y}{dn^2} - Y = 0 \quad \text{dont l'intégrale est}$$

$$Y = Ce^n + C'e^{-n};$$

lorsque  $n = 0$  la proposée se réduit à zéro,

ainsi  $0 = C + C'$ , et  $Y = C \{ e^n - e^{-n} \}$

si  $n = a$  la proposée se change en

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{\pi}{2} = C \{ e^a - e^{-a} \}$$

$$\text{et } C = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{e^a - e^{-a}} \right\}$$



substituant cette valeur de la constante on aura

$$Y = \int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{(1+x^2) \sin ax} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^n - e^{-n}}{e^a - e^{-a}} \right\}$$

différentiant cette équation par rapport à  $n$ , il viendra sur le champ

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx \cos nx}{(1+x^2) \sin ax} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^a - e^{-a}} \right\}.$$

Pour la troisième proposée je fais

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x(1+x^2) \cos ax},$$

et différentiant deux fois de suite par rapport à la quantité  $n$  j'obtiens

$$\frac{dZ}{dn} = \int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{(1+x^2) \cos ax}$$

$$\frac{d^2Z}{dn^2} = - \int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x \cos ax} + \int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x(1+x^2) \cos ax},$$

et à cause que  $\int_0^{\infty} \frac{dx \sin nx}{x \cos ax} = 0$

on aura l'équation  $\frac{d^2Z}{dn^2} - Z = 0$

d'où  $Z = Ce^n + C'e^{-n}$

lorsque  $n = 0$  la proposée est nulle,

donc  $C' = -C$  et  $Z = C \{ e^n - e^{-n} \}$

on tire de là  $\frac{dZ}{dn} = C \{ e^n + e^{-n} \} = \int_0^{\infty} \frac{dx \cos nx}{(1+x^2) \cos ax},$

cette valeur se réduit à  $\frac{\pi}{2}$  si  $n = a$ ,

donc  $\frac{\pi}{2} = C \{ e^a + e^{-a} \}, C = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{e^a + e^{-a}} \right\}$

substituant cette valeur de la constante on a enfin

$$Z = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^n - e^{-n}}{e^a + e^{-a}} \right\};$$

la quatrième proposée sera donnée par

$$\int_0^\infty \frac{dx \cos nx}{(1+x^2) \cos ax} = \frac{dZ}{dn} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^a + e^{-a}} \right\}.$$

(V. M. LE-GENDRE Tom. 2 pag. 175).

61. En général lorsqu'il s'agit de parvenir à l'intégrale définie, d'une fonction en la différentiant par rapport à quelque constante, il est nécessaire que cette constante demeure toujours en évidence dans la suite du calcul; ce qu'on verra mieux par l'exemple suivant.

Soit proposée la fonction  $\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^2 (e^{2\pi x} - 1)}$   
 je fais  $\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 - a^2) (e^{2\pi x} - 1)} = Z$

d'où il suit qu'après avoir déterminé cette fonction, on aura sur le champ

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^2 (e^{2\pi x} - 1)} = \frac{1}{2a} \frac{dZ}{da}.$$

Maintenant il est clair qu'on peut écrire

$$Z = \int_0^\infty \frac{x dx e^{-ax}}{(x^2 - a^2) (e^{\pi x} - e^{-\pi x})};$$

développant la fraction  $\frac{x e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}$  en fractions partiel-

les, d'après la méthode exposée par EULER dans son introduction à l'analyse de l'infini, on aura

$$Z = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - a^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{\pi} \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \text{etc.} + \frac{1}{k^2+x^2} \right) \right\};$$

il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - a^2}, \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2 - a^2}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(k^2 + x^2)(x^2 - a^2)};$$

d'abord on sait que  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0$ ,

ensuite il est évident que

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^2 - a^2} = \int_a^\infty \frac{xdx}{x^2 - a^2} - \int_0^a \frac{xdx}{a^2 - x^2},$$

et l'on trouvera sans peine

$$\int_a^\infty \frac{xdx}{x^2 - a^2} = \log. \infty - \frac{1}{2} \log. 0, \quad \int_0^a \frac{xdx}{a^2 - x^2} = \log. a - \frac{1}{2} \log. 0$$

$$\text{d'où} \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2 - a^2} = \log. \infty - \log. a;$$

enfin on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(k^2 + x^2)(x^2 - a^2)} = \frac{1}{k^2 + a^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} - \frac{x^2 dx}{k^2 + x^2} \right\}$$

$$\text{mais} \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} = \int_0^a dx + a^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{k^2 + x^2} = \int_0^\infty dx - k^2 \int_0^\infty \frac{dx}{k^2 + x^2};$$

$$\text{de là en observant que} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0$$

on déduit

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(k^2 + x^2)(x^2 - a^2)} = \frac{k^2}{k^2 + a^2} \int_0^\infty \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{k\pi}{2(k^2 + a^2)}.$$

Au moyen des valeurs précédentes on obtient

$$Z = -\frac{1}{2} \log \infty + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{4+a^2} + \frac{3}{9+a^2} + \text{etc.} + \frac{k}{k^2+a^2} \right\},$$

et différentiant cette fonction relativement à la constante  $a$ , on aura pour l'intégrale cherchée

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2-a^2)^2(e^{2\pi x}-1)} = \frac{1}{2a} \frac{dZ}{da} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1+a^2)^2} + \frac{2}{(4+a^2)^2} + \frac{3}{(9+a^2)^2} + \text{etc.} + \frac{k}{(k^2+a^2)^2} \right\}$$

où il faut pousser la série jusqu'à  $k = \infty$ .

On peut donner à cette intégrale une forme très-simple en exprimant la série

$$\frac{1}{(1+a^2)^2} + \frac{2}{(4+a^2)^2} + \frac{3}{(9+a^2)^2} + \text{etc.} + \frac{k}{(k^2+a^2)^2}$$

par les nombres Bernouillens. En effet désignons cette série par  $S F(k)$  on sait (LA-CROIX T. 3 p. 113) que

$$S F(k) = C + \int dk F(k) + \frac{1}{2} F(k) + A_2 \frac{dF(k)}{dk} + A_4 \frac{d^2 F(k)}{dk^2} + A_6 \frac{d^3 F(k)}{dk^3} + \text{etc.}; \quad (A)$$

$$\text{or nous avons ici } F(k) = \frac{k}{(k^2+a^2)^2}$$

$$\text{d'où l'on déduit } \int dk F(k) = \frac{-1}{2(k^2+a^2)},$$

$$\frac{dF(k)}{dk} = \frac{a^2-3k^2}{(k^2+a^2)^3}, \quad \frac{d^2 F(k)}{dk^2} = -12 \frac{(a^4-10a^2k^2+5k^4)}{(k^2+a^2)^5}, \text{ etc.}$$

de plus nommant  $B_1, B_3, B_5$ , etc. les nombres Bernouillens on sait que

$$2 A_2 = B_1, \quad 2.3.4 A_4 = B_3, \quad 2.3.4.5.6 A_6 = B_5, \text{ etc.}$$

ainsi de suite; par ces substitutions on trouve

$$SF(k) = C - \frac{1}{2(k^2+a^2)} + \frac{k}{2(k^2+a^2)^2} \\ + \frac{B_1(a^2-3k^2)}{2(k^2+a^2)^3} - \frac{B_3(a^4-10a^2k^2+5k^4)}{2(k^2+a^2)^5} + \text{etc.};$$

pour déterminer la constante  $C$ , je fais  $k=0$  ce qui donne

$$SF(k)=0 \text{ et de là}$$

$$C = \frac{1}{2a^2} - \frac{B_1}{2a^4} + \frac{B_3}{2a^6} - \text{etc.}$$

substituant cette valeur de la constante dans l'équation supérieure, la divisant par deux, et faisant  $k=\infty$  afin d'avoir la somme de la série à l'infini, il viendra

$$\frac{1}{2} SF(k) = \frac{1}{4a^2} - \frac{B_1}{4a^4} + \frac{B_3}{4a^6} - \text{etc.}$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2 (e^{2\pi x}-1)} = \frac{1}{4a^2} \left\{ B_1 - \frac{B_3}{a^2} + \frac{B_5}{a^4} - \text{etc.} \right\}$$

c'est sous cette forme que M. PLANA a donné la même intégrale dans la savante note publiée sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernouillens dans les volumes de l'Académie de Turin Tom. 25.

$$62. \text{ Si on proposoit } \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2 (e^{2\pi x}-1)}$$

$$\text{après avoir fait } \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+a^2)(e^{2\pi x}-1)} = Z,$$

et déterminé cette fonction, il est clair qu'on aura tout de suite

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2 (e^{2\pi x}-1)} = -\frac{1}{2a} \frac{dZ}{da}.$$

$$\text{Or } Z = \int_0^{\infty} \frac{x dx e^{-\pi x}}{(x^2+a^2)(e^{\pi x} - e^{-\pi x})};$$

développant comme ci-dessus la fonction  $\frac{x e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}$

on aura

$$Z = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{\pi} \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{9+x^2} + \text{etc.} + \frac{1}{k^2+x^2} \right) \right\}$$

et il ne restera plus qu'à déterminer les valeurs

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2+a^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(k^2+x^2)(x^2+a^2)}$$

$$\text{on sait que } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2+a^2} = \log. \infty - \log. a,$$

de plus il est évident que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(k^2+x^2)} = \frac{1}{a^2-k^2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{a^2 dx}{x^2+a^2} - \frac{k^2 dx}{k^2+x^2} \right\}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(k^2+x^2)} = \frac{\pi}{2(a+k)},$$

de là posant successivement pour  $k$  tous les nombres 1. 2. 3. . . etc. à l'infini on aura

$$Z = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2} \log. \infty + \frac{1}{2} \log. a + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \text{etc.} + \frac{1}{k+a} \right\},$$

et enfin pour l'intégrale cherchée

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2 (k^2+x^2)} = -\frac{1}{2a} \frac{dZ}{da} =$$

$$\frac{1}{8a^3} - \frac{1}{4a^3} + \frac{1}{4a} \left\{ \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+3)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(k+a)^2} \right\};$$



cette valeur coïncide évidemment avec celle ( pag. 114 ) de la note citée supérieurement , savoir

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2 (e^{2\pi x} - 1)} = -\frac{1}{8a^3} - \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a} \frac{d \log \Gamma(a)}{da}.$$

En effet on a d'après le n.º 22 de la première partie de ce mémoire

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(2+a)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(k+a)^2}$$

où il faut supposer  $k = \infty$ .

Portant cette valeur dans l'équation supérieure elle se réduira identiquement à la même équation trouvée ci-dessus.

En transformant cette intégrale comme celle du n.º précédent au moyen des nombres Bernouillens on lui donnera aussi une autre forme très-simple.

$$\text{On a ici } S F(k) = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(2+a)^2} + \frac{1}{(3+a)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(k+a)^2}$$

$$F(k) = \frac{1}{(k+a)^2}, \quad \int dk F(k) = -\frac{1}{k+a}$$

$$\frac{dF(k)}{dk} = \frac{-2}{(k+a)^3}, \quad \frac{d^3 F(k)}{dk^3} = \frac{-24}{(k+a)^5}, \quad \text{etc.}$$

portant ces valeurs dans l'équation (A) du n.º précédent on

$$\text{aura après avoir fait } A_2 = \frac{B_1}{2}, \quad A_4 = \frac{B_3}{24}, \quad \text{etc.}$$

$$S F(k) = C - \frac{1}{k+a} + \frac{1}{2(k+a)^2} - \frac{B_1}{(k+a)^3} - \frac{B_3}{(k+a)^5} - \text{etc.}$$

or pour déterminer la constante on fera  $k=0$  d'où  $S F(k)=0$ ,

$$\text{et } C = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{B_1}{a^3} + \frac{B_3}{a^5} + \text{etc. de là}$$

$$\frac{1}{4a} S F(k) = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{4a^4} \left\{ B_1 + \frac{B_3}{a^2} + \frac{B_5}{a^4} + \text{etc.} \right\}$$

enfin par cette substitution dans l'intégrale trouvée il viendra

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+a^2)^2 (e^{2\pi x}-1)} = \frac{1}{4a^4} \left\{ B_1 + \frac{B_3}{a^2} + \frac{B_5}{a^4} + \text{etc} \right\}.$$

$$\text{La valeur } Z = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2-a^2)(e^{2\pi x}-1)}$$

trouvée dans le n.<sup>o</sup> précédent suppose que cette fonction est la somme des élémens de l'intégrale compris entre les limites  $x=0$ ,  $x=\infty$ , autrement si l'on ne veut considérer que le seul résultat analytique, alors on trouvera

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{4a\pi} \log. (-1) - \frac{1}{2} \left( \log. \infty - \frac{1}{2} \log. (-a^2) \right) \\ & + \frac{a}{2\pi} \log. (-1) \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \frac{1}{9+a^2} + \text{etc.} + \frac{1}{k^2+a^2} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{4+a^2} + \frac{3}{9+a^2} + \text{etc.} + \frac{k}{k^2+a^2} \right\}, \end{aligned}$$

et de là on déduira facilement l'expression ou la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2-a^2)^2 (e^{2\pi x}-2)} = \frac{1}{2a} \frac{dZ}{da}$$

relativement à cette nouvelle supposition.

Au reste conformément au n.<sup>o</sup> 58 si on fait dans cette dernière expression de  $Z$ ,  $\log. (-1) = \pi \sqrt{-1}$ , et qu'on change  $a$  en  $a \sqrt{-1}$  elle donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+a^2)(e^{2\pi x}-1)}, \text{ ou}$$

$$Z = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2} \log. \infty + \frac{1}{2} \log. a + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{4+a} + \frac{1}{9+a} + \text{etc.} + \frac{k}{k^2+a} \right\}$$

comme on l'a trouvé ci-dessus.

pag. lign.

FAUTES

CORRECTIONS

209 17 Tom. 3 pag. 5

210 2 sur les calculs

23 le dernier genre

211 3  $\int x^{n-1} dx (1-x)^n \frac{q-n}{n}$

212 13 T. 3 p. 46

14  $x^p + \frac{(q+p)}{(p+1)} x^{p-1} +$

215 9  $\frac{p+r}{p+1} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{2}{r+2},$

218 20 que cette expression

22  $\frac{\pi}{\sin p \pi}$

220 13  $(1-x)^{q-1}$

222 4 exprimée

13 c'est qu'on deduit

226 4  $= \frac{r}{q} \left\{ \frac{2}{q+1} \right\}$

231 9  $\dots \frac{2r}{2r-1} \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \right\}$

10 on le

234 15  $= -z - \frac{1}{2} z^3 - \log(1-z)$

19  $\dots + \frac{1}{r}$

236 12  $+ \frac{1}{2.1.2} \left( \log \frac{2}{x} \right)^2 -$

238 7 or si on fait

8  $-1,31790215$

Tom. 2 pag. 5

sur le calcul

ce dernier genre

$\int x^{p-1} dx (1-x)^n \frac{q-n}{n}$

T. 2 p. 46

$x^p + \frac{(q+p)}{(p+1)} x^{p+1} +$

$\frac{p+r}{p+1} \cdot \frac{1}{r+1} \cdot \frac{2}{r+2},$

que la partie de cette expression

$\frac{p \pi}{\sin p \pi}$

$(1-x)^{q-1}$

exprimées

c'est ce qu'on deduit

$= \frac{r}{q} \left\{ \frac{1}{q+1} \right\}$

$\dots \frac{2r}{2r-1} = \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \right\}$

on la

$= -z - \frac{1}{2} z^3 - \frac{1}{3} z^3 - \log(1-z)$

$\dots + \frac{1}{r} z^r$

$+ \frac{1}{2.1.2} \left( \log \frac{1}{x} \right)^2 -$

si on fait

$-1,31790215;$

pag. lign.

FAUTES

CORRECTIONS

$$241 \quad 9 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+2} + \dots$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots$$

$$244 \quad 3 \quad \frac{1-x}{1-n} \text{, ou } \frac{1-x}{1-n}$$

$$\frac{1-x}{1-x} \text{, ou } \frac{1-x}{1-x}$$

$$256 \quad 14 \quad \left\{ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \dots \right.$$

$$\left\{ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots \right.$$

$$259 \quad 5 \quad e^{-2a} \int_0^\infty dt \left( 1 - \frac{t^2}{r} \right)$$

$$e^{-2a} \int_0^\infty dt \left( 1 - \frac{t^2}{r} \right)^r$$

267 17 en quantité

en quantités

$$274 \quad 17 \quad n \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1}$$

$$-n \sin. \frac{a\pi}{2} \int_0^1 du \left( \log. \frac{1}{u} \right)^{-a-1}$$

$$279 \quad 14 \quad = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{dx \cos. nx}{x^a}$$

$$= \frac{n}{a} \int_0^\infty \frac{dx \cos. nx}{x^a}$$

$$285 \quad 9 \quad \pm x$$

$$\pm z$$

## CONTINUAZIONE

## DEL SAGGIO DI ORITTOGRAFIA PIEMONTESE

DEL PROFESSORE STEFANO BORSON

*Letta nell' adunanza delli 20 maggio 1821.*GENERE XIX. *STROMBUS*.1. *STROMBUS GALLUS* Linn. ?

*Testa ovata, tuberculata; spirae breviusculae anfractibus mucronato-spinosis; primo amplissimo, superne spinis validis, crassissimis coronato; columella rotundata, laevi, in caudam subulatam brevem inflexam desinente; labio trilobo, expanso, crasso, marginato.*

Esso si riferisce convenientemente alla fig. F. Tav. 32 di Gualtieri, la quale viene citata per una varietà dello *strombus gallus*, da Gmelin. Ma notisi, che per carattere del medesimo, egli dice, che ha, *cauda recta*, quando la cosa non è così nelle figure di Listero e di Gualtieri da esso citate.

Fossile nell'Astigiana, e forse anche nell'Ossola. Linneo lo fa nativo nei mari dell'Asia e dell'America meridionale.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 179.*

TOM. XXVI.

P p

Fra i numerosi esemplari che abbiamo di questo strombo, si osserva, che nei più giovani, gli anfratti sono quasi privi di spine e di punte; e verso la sommità della spira compajono picciole coste o tubercoli. Negli adulti poi, il grande anfratto, oltre la serie di robuste spine, viene ricoperto ancora di una o due serie di forti grandi tubercoli, che tendono trasversalmente verso la base: e gli altri anfratti sono anche tubercolati o spinosi.

2. STROMBUS PUGILIS Linn.

*Testa crassa; spirae subelongatae anfractibus tuberculis validis coronatis, fortioribus in majori; columella laevi, rotundata; cauda subinflexa; labio expanso.*

Listero Tav. 864, fig. 19. Knorr. P. II. C. III. fig. 1, 2.

Fossile in Piemonte: nativo in quell'oceano, che bagna la Giamaica e l'America meridionale (Linn.)

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 179, 180.

Lunghezza 5 pollici 2 linee, benchè un poco rotto alle due estremità.

Lo abbiamo anche allo stato spatoso, e in questo stato io lo credo una varietà del medesimo a spira più lunga e tutta coronata. Un'altra serie di tubercoli sembra nascere accanto ai più grossi dell'anfratto maggiore: in questi ultimi esemplari danneggiati in più parti, la sabbia molto indurita vi sta unita con gran forza.



GENERE XX. *PTEROCERA*.1. *PTEROCERA*.

*Strombus pes pelicani*, Linn.

Fossile molto comune in Piemonte e in altri luoghi della Italia. Abita nell'oceano Europeo, nel mare delle Indie, nel Mediterraneo e nell'Adriatico.

*Oryctograph. Pedem. Allioni pag. 69.*

Lo abbiamo colle frangie del labbro destro molto allungate.

GENERE XXI. *MUREX*.1. *MUREX CORNUTUS* Linn. V. Brocchi pag. 389.

Abita nell'oceano Africano dove è raro. Si trova fossile nel Piacentino; e in Piemonte nella valle d'Andona e altrove anche frequentemente.

I nostri esemplari sono di una bella conservazione e colle spine intiere.

Lunghezza 3 pollici 8 linee, e altezza uguale sino alle estremità delle spine.

2. *MUREX BRANDARIS* Linn.

Abita nell'Adriatico e nel Mediterraneo (Linn.): fossile in Piemonte, nel Piacentino e in altri luoghi d'Italia.

Lunghezza 4 pollici e più. Molti esemplari di 1 pollice circa hanno nell'anfratto maggiore due ordini di spine: la coda è anche spinosa e gli anfratti sono tuberculati.

3. *MUREX TRUSCULUS* Linn.

*Testa crassa, ovata, laminis longitudinalibus rudi-*

*bus, fimbriatis superne spinosis, ad caudam inflexam brevem confertim plicatis, ibique umbilicum apertissimum efformantibus; apertura ovata hinc inde soluta.*

Abita nel Mediterraneo e presso la Giamaica; nell'Adriatico (Olivi): fossile in Piemonte e in altri luoghi d'Italia.

Listero Tav. 952, fig. 1. Knorr. P. II. G. III. fig. 7.

Lunghezza 4 pollici  $\frac{1}{2}$ , altezza 3  $\frac{1}{2}$ . Ne abbiamo di minor dimensione in cui spine, strie, solchetti si vedono in tutti gli anfratti.

4. MUREX TRIBULUS Linn. ?

*Testa ovata, fusiformis; anfractibus spinis acutiusculis, bifariam vel trifariam per longum exasperatis, tuberculis vel nodis intermediis: cauda subulata, recta, subspinosa.*

Abita nel mar Rosso e nelle regioni marittime fra l'Asia e l'America meridionale: fossile non raro nelle colline dell'Astigiana. Ma è cosa difficile di trovarlo intiero, essendo e le spine e la coda assai fragili. Ne abbiamo però della lunghezza di più di due pollici, e di quelli, che appena giungono a sei linee senza la coda. Listero Tav. 902, fig. 22.

5. MUREX MINAX. Enciclop. metod. parte 23, Tav. 441, fig. 4.

Lunghezza 2 pollici 2 linee.

6. MUREX RAMOSUS Linn.

*Testa ovato-oblonga, transversim striata, laminis trifariam crispato-frondosis ornata, medio costata; cauda ascendente, subinflexa.*

Abita nel mar Rosso, nel seno Persico, e nell'Oceano, che bagna l'Africa e l'America australe (Linn.): fossile nel Piacentino, nelle Crete Sanesi e in Piemonte.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 180 n.° 13.*

Ho creduto dover annoverare questo fossile fra i numerosi murici frondosi di Linneo; poichè questi variano assai nella figura delle lacinie e nel numero delle varici frondose, come in altre loro parti.

Lunghezza 3 pollici e 3 linee.

7. MUREX TRIPTERUS Linn.

Abita nel mare delle Indie presso Batavia (chemnitz): fossile in Piemonte, e in altri luoghi dell'Italia. Knorr. P. II. C. II. fig. 8?

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 178 n.° 4.*

8. MUREX SAXATILIS Linn.

*Testa ovata, transversim sulcata, multifariam frondosa, frondibus undatis, concatenatis; spira retusa; cauda subelongata; apertura ovata.*

Abita nel Mediterraneo, e nel mare, che bagna l'Asia meridionale (Linn.): fossile in Piemonte e nel Piacentino.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 180 n.° 14.*

Brocchi dice non conoscere di questo bel fossile, che piccioli individui di 10 linee al più. Il nostro ne ha 18. Esso ha sette coste fogliacee, che corrono sino verso la sommità della coda ove formano spine.

9. MUREX TUBIFER Linn. FISTULOSUS Brocchi pag. 393.

Posso paragonare questo, che mi è riuscito di trovare

nella nostra valle d'Andona, con quello di Grignone, che abbiamo nella raccolta. Nel nostro che è più piccolo, poichè appena giunge a cinque linee di lunghezza, compajono varici longitudinali coronate alla loro estremità di spine cilindriche vuote, che tendono all' apice della spina, in vece delle membrane o pieghe acute e laciniate, che si vedono in quello di Francia.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino, a Parlascio, a Grignone e ad Hampton in Inghilterra.

Bruguiere dice che l'originale marino esisteva nella raccolta del dottore Hunter a Londra.

10 MUREX DECUSSATUS Linn. V. Brocchi pag. 391.

Abita nei mari, che bagnano l'Africa occidentale: fossile non raro nelle nostre colline e anche nel Piacentino.

V. Davila catal.

11. MUREX CRISTATUS Brocchi pag. 394.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Si deve notare, che i fogliami arricciati non sono uguali in tutti gli esemplari: alcuni appena sono rilevati, e quello forse dipende dallo stato di salute dell' animale.

Lunghezza 16 linee.

12. Lo stesso in cui le foglie longitudinali non sono bene sviluppate.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 180 n.º 16.*

13. MUREX IMERICATUS, Brocchi pag. 408.

Si vuole, che l'analogo fra i viventi possa esistere presso le coste della nuova Zelandia, colla differenza, che nel

nostro, le coste sono più rilevate. Esso non è raro in Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 1 pollice 7 linee.

14. MUREX INTERMEDIUS Brocchi pag. 400.

Fossile nella valle d'Andona e nel Piacentino.

Lunghezza linee 12.

15. MUREX NODULOSUS nob. Tav. I. fig. 1 (un poco ingrandita).

*Testa subfusiformis; transversim et longitudinaliter subtilissime striata; anfractus majoribus nodosis, nodis costatim dispositis, medio muricatis; minoribus confertim costatis: apertura ovata: labio dextero crasso, intus valide dentato (1).*

Non raro nello stato fossile in Piemonte.

I nodi di cui va coperto tendono ad essere spinosi nel mezzo dell'anfratto maggiore, e vanno decrescendo presso la coda un poco allungata ed incurva. Gli anfratti minori sono elegantemente costati, e l'apice è glabro. Potrebbe avere qualche somiglianza col murice nodulario del Lam. di cui però non vi è la figura.

Lunghezza 15 linee.

16. MUREX RUGOSUS. V. Sowerby, *mineral conchology*. Tab. 34. upper figures?

---

(1) Si avverte, che alcune figure massime fra le piccole, eseguite per mezzo della litografia, non sono nelle parti minute riuscite a tutta quella esattezza che richiederebbe una naturale rappresentazione.

*Testa subfusiformis , costata , cingulis transversis cincta , longitudinaliter minute striata ; apertura ovata , oblonga ; cauda breviuscula.*

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 179 n.º 8.*

I cingoli trasversali sono composti di un cordone in mezzo a due filetti ; il labbro destro è internamente solcato. La tavola 34 dell'opera ottimamente incisa del signor Sowerby, stampata in Londra, presenta due testacci, che hanno grande rassomiglianza con i nostri, dalla grossezza in fuori: essendo i nostri di 14 linee di lunghezza.

Fossile nell' Astigiana , nel Monferrato , e in Inghilterra sul pendio della collina di Essex ove è rara , e a Suffolk.

17. MUREX FUNICULOSUS nob. Tav. I. fig. 2.

*Testa subfusiformis , costata ; anfractibus funiculis cinctis , supra costas fimbriatim imbricatis , subnodosis ; apertura ovata , clausa ; labio intus dentato ; cauda breviuscula , subinflexa.*

Fossile in Piemonte.

I cordoncini , che lo cingono , sembrano dovunque fatti a volta , ma principalmente sopra le coste ove si ricuoprano gli uni gli altri ; e fra un cordone e l'altro vi è ora un filetto , ora vi sono delle strie trasversali.

Lunghezza 18 linee.

18. MUREX *praecedenti affinis.*

In questo le coste sono più ravvicinate e più picciole , di modo che l'incrociamento di queste con i cordoni trasversali rende la conchiglia quasi cancellata , e alcune varici



cingono gli anfratti. Io stimerei che in questo esemplare l'animale era ammalato.

Lunghezza 13 linee.

19. MUREX RETUSUS nob. Tav. I. fig. 3.

*Testa ovata, spirae breviusculae anfractus rotundatis, perlongum minute striatis, cingulis funiformibus cinctis; apertura ovata in canalem subinflexum desinente; labio marginato, intus dentato; varicibus oppositis.*

Fossile in Piemonte.

La sua apertura forma pressochè la metà della lunghezza totale, che arriva a 10 linee: le strie longitudinali passando sopra i cingoli trasversali vi formano piccioli risalti. Vi è una varietà, che ha un filetto in mezzo ai cingoli ed alcune coste longitudinali: essa è della medesima dimensione.

20. MUREX PILEARE Linn. V. Brocchi pag. 395.

Abita nel Mediterraneo. Fossile in Piemonte e in altri luoghi d'Italia.

Convienne assai a quanto ne dice il nostro autore: ma è da avvertire, che parecchi dei nostri esemplari vengono muniti di grosse coste e di varici non inferiori. Varia anche la loro lunghezza: alcuni oltrepassando 3 pollici 3 linee, altri non hanno più di 16 linee. Pare che nei più giovani i denti interni del labbro sinistro siano più acuti e più espressi.

21. MUREX DISTORTUS Brocchi pag. 399.

Fossile nell'Astigiana e nel Piacentino.

Lunghezza 19 linee. Ve ne sono, che ne hanno

TOM. XXVI.

Q q

soltanto 11, con una coda più lunga, di modo che si possono collocare nel genere *susus*.

21 bis. MURICIS DISTORTI VARIETAS?

Forse varietà del precedente, a spira più corta, con anfratti contigui, e costaline molto ravvicinate in quelli che vanno più verso all'apice. Fu preso nel medesimo luogo.

22. MUREX DOLIARE Brocchi pag. 398.

Fossile non raro in Piemonte. Si trova anche nel Sane-  
se, nel Piacentino, e sulle colline Pisane.

Ne abbiamo d'ogni età, dalla lunghezza di 11 linee sino a 4 pollici. Nei primi si vede tuttora la varice laterale.

23. MUREX RETICULARIS Linn. V. Brocchi pag. 402.

Abita nel Mediterraneo, e nei mari dell'America (Linn.):  
fossile in Piemonte, nel Piacentino, e nelle Crete Sanesi.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 179 n.º 5.*

Var. a nodi spinosi. Lunghezza pollici 2.

24. MUREX CORNEUS Linn.

Abita nell'Oceano settentrionale e britannico, e anche  
nell'Adriatico. Fossile comune in Piemonte, nelle colline  
Pisane e altrove in Italia.

Lunghezza 2 polici e  $\frac{1}{2}$ . Lo troviamo anche sulle nostre  
colline allo stato spatoso.

25. MUREX TORTUOSUS nob. Tav. I. fig. 4.

*Testa tortuosa, informis; anfractus costatis, gib-  
bis; transversim obsolete sulcata; cauda ascendente, in-  
flexa.*

Fossile allo stato spatoso sulle nostre colline.

Questo testaceo veramente singolare per la sua bizzarra configurazione ha il più grande anfratto ricoperto di coste molto rilevate verso la sinistra; contiguo a questo ne viene un altro molto più ristretto con coste proporzionate. L'anfratto seguente ha ugualmente la sua gobba, ma diretta verso la dritta, ove poi si fa sempre minore al punto di scomparire sotto la parte inferiore dell'apertura. Questo viene poi similmente seguito da un altro più piccolo, il quale pare più regolare e va ascendendo verso l'apertura ove sembra confondersi col secondo.

Questo fossile avendo l'apertura piena di sabbia molto indurita, e il suo apice degradato, non lascia scorgere altri caratteri.

Lunghezza 1 pollice 7 linee, altezza linee 11.

26. MUREX LIGNARIUS Linn.

Abita nei mari settentrionali: fossile nella valle d'Andona. Si deve osservare che nei nostri esemplari di 1 pollice e mezzo, i nodi dell'anfratto maggiore vengono seguiti da una sorta di prominenza rilevata.

27. MUREX BICAUDATUS nob. Tav. I. fig. 5.

*Testa ovata, transversim sulcata, sulcis medio obsolete crispis; anfractus fere contiguus, sub-costatis; apertura ovata, clausa; labio intus sulcato; cauda breviuscula duplici; apice aperta.*

Fossile allo stato spatoso nel Piemonte.

Son d'avviso, che la conchiglia non avesse che una coda, la quale è il prolungamento dell'apertura: ma alla

sinistra è molto apparente un altro prolungamento unito al primo, che viene formato dalle estremità inferiori delle coste riunite insieme; e questo allungamento è molto simile alla coda.

Lunghezza 13 linee.

28. MUREX RUDIS nob. Tav. I. fig. 6.

*Testa crassa, ovata, transversim striata, costato-nodosa, costis rotundatis, decussantibus; apertura ovata.*

Le coste nodose in mezzo terminano nell'anfratto inferiore alla base, formando ivi risalti o pieghe spesse al luogo dell'umbilico. Paragonato con una varietà del *murex trunculus*, che abbiamo al n.º 3, di minor dimensione, potrebbe con esso avere qualche rassomiglianza: ma il presente viene privo affatto di tubercoli, di spine, e di lamine fimbriate, e le coste nodose sono perfettamente nude.

Lunghezza 16 linee, altezza 11.

29. MUREX TESSULATUS nob. Tav. I. fig. 7.

*Testa pyriformis, transversim fasciata, fasciis quadratum divisis, longitudinaliter obsolete costata; anfractibus rotundatis, sutura incavata discretis; apertura ovata; labio crasso, marginali intus dentato; cauda elongata.*

Fossile nell'Astigiana.

Al primo aspetto io l'ho creduto una varietà del *murex heptagonus* di Brocchi pag. 404 a cagione delle faccette, che le coste longitudinali formano sulla conchiglia: ma gli anfratti rotondati del presente, la brevità della spira,

i quadrati formati dalle fascie trasversali, che vengono tagliati da linee longitudinali, e l'incavo profondo che separa gli anfratti ne debbono fare una specie distinta. Si deve notare, che tra una fascia e l'altra vi è un cordoncino, che per la sua picciolezza pare granoso.

Lunghezza 11 linee  $\frac{1}{2}$ .

30 MUREX POLYMORPHUS Brocchi pag. 415.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e nelle colline Pisane.

Potrebbe appartenere al genere *fusus*; viene forse figurato nella Enciclop. metod. parte 23. Tav. 441 fig. 5? ove prende il nome di *murex torosus*. In alcuni nostri esemplari le coste poco espresse sono prive di spine, e il piano superiore degli anfratti è quasi liscio.

31. MUREX ECHINATUS Brocchi pag. 423?

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Ho messo il segno di dubbio, poichè nei nostri esemplari le papille, che vengono formate dall'intersecazione delle coste longitudinali con i cordoncini trasversali, non sono acute, nè spinose, ma sono piuttosto nodi trasversali. Inoltre i cordoni trasversali hanno in mezzo filetti sottilissimi. Questo murice potrà essere una varietà di quello di Brocchi.

Lunghezza 9 linee.

32. MURICIS HIPPOCASTANI var. *Liun.* pag. 3539.

*Testa ovata, costata, subreticulata; apertura elongata; canali breviusculo, subinflexo.*

I nostri esemplari un poco malconci non male possono ragguagliarsi colla figura 16 *a*, *b*, Tav. 896 del Listero, supponendo tuttavia, che esse vi sieno state incise colla spira in iscorcio, giacchè i nostri l'hanno più lunga: essi sono privi di spine, e le coste sono nodose. Leggeri fletti longitudinali intersecano le strie trasversali, onde ne nasce una sorta di reticolatura. Vedendo nel Linneo di Gmelin alcune varietà di questo murice, ho pensato, che anche questi murici privi di tubercoli e di spine potessero annoverarsi fra esse.

Lunghezza 11 linee  $\frac{1}{4}$ .

23. MURICIS BRANDARIS *n.<sup>i</sup> 2 varietas?* Tav. I. fig. 8.

Fossile in Piemonte.

Il mio primo pensiere era di fare di questo murice una specie particolare; ma avendo veduto in alcuni nostri esemplari, che le coste poco espresse terminavano in pieghe acuminate sul finire dell'anfratto maggiore, ove il medesimo si appiatisce, che anche picciolissime spine si mostravano attraverso la coda allungata, e che non mancavano alcuni altri caratteri, ho creduto dovermi restringere a farne una varietà, la quale sarà di piccola dimensione, poichè non giunge a 12 linee, colla differenza però (se non erro) che la spira in questa compare più lunga proporzionalmente, che nel *brandaris* di misura più grande.

34. MUREX TURRITUS *nob.* Tav. II. fig. 9.

*Testa turrila; anfractubus convexis, transversim sulcatis, filo medio, longitudinaliter costatis; apertura*



ovata ; labro intus sulcato ; cauda brevi , subinflexa.

Fossile in Piemonte.

I cordoni , che lo attraversano , hanno un filetto in mezzo. Esso sarebbe un *buccinum* della categoria dei *turriti* nella nomenclatura di Linneo , se la coda più breve fosse slabbrata alla base. Non è lontano dal *buccinum asperum* di Linneo pag. 3503, citando Listero, Tav. 925. fig. 17.

35. MUREX HARPULA Brocchi pag. 421.

Fossile in Piemonte e nelle colline Reggiane.

Lunghezza 4 linee.

36. MUREX VULPECULUS , Brocchi pag. 420.

Fossile in Piemonte , nel Piacentino , a Parlascio in Toscana. Abita nell' Adriatico.

Lunghezza 6 linee.

37. MUREX AMPHORA nob. Tav. I. fig. 10.

*Testa fusiformis , ovata ; anfractus transversim sulcatis , filo medio , duobus inferis costato-nodosis , reliquis elongatis , glabris.*

Fossile in Piemonte ; e si trova anche allo stato spatoso.

Questo è nel numero di quei pochi fra tanti , i quali benchè spatosi , non vengano attaccati alla sabbia serpentinoso , e che conservino intatti i loro caratteri. La parte superiore degli anfratti è un poco appiattita , e la coda va incurvandosi alla base.

Lunghezza 6 linee.

38. MUREX INFLATUS Brocchi pag. 412.

Fossile nel Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 13 linee.

39. MUREX GRANOSUS nob. Tav. I. fig. 11.

*Testa fusiformis; anfractibus striis obsoletis, granosis, transversim cinctis, in medio nodosis; varicibus oppositis; apertura hinc-inde, columellaque extus sulcatis; cauda breviuscula, subinflexa.*

Fossile in Piemonte.

Non mi è riuscito di trovarne fuorchè un solo e anche di mediocre conservazione. La sua forma è quasi simile al precedente, ma il carattere per cui viene principalmente distinto, consiste nei solchi rilevati, con cui la columella nell'interno e al di fuori viene ornata, come anche il labbro nell'interno. Gli anfratti alla cima sono glabri.

Lunghezza linee 4  $\frac{1}{2}$ .

40. MUREX FUSCULUS Brocchi pag. 409.

Fossile nella valle d'Andona.

Lunghezza 6 linee.

## GENERE XXII. *Fusus*.

### 1. *Fusus*.

*Murex trapezium*. Linn. pag. 3552.

Vive nell'Oceano Indico: fossile non frequente nell'Astigiana. Gualt. Tav. 52. fig. T.

Lunghezza 4 pollici; e anche senza la coda di cui questo esemplare è privo.

## 2. FUSUS.

*Murex colus* Linn. pag. 3543.

Vive non frequente nei mari delle Indie orientali; si trova fossile nel terreno sabbioso dell' Astigiana.

Lunghezza 4 pollici 9 linee. Ve ne sono dei più corti.

## 3. FUSUS.

Il medesimo *murex colus* ? allo stato spatoso sepolto nell' arena indurita della collina di Torino. Notisi che una serie di nodi orna trasversalmente il grande anfratto, e che gli altri hanno delle coste longitudinali. Egli è rotto alle due estremità, e con tale peggioramento giunge ancora alla lunghezza di 4 pollici, ed all' altezza di 1 pollice e 7 linee. Del resto egli è simile al *murex colus*.

4. FUSUS LONGAEVUS. V. Sowerby *mineral conchology of great Britain*. London 1812.

*Testa crassa, longitudinaliter undatim minute rugosa; anfractus scalariformibus, superne planatis, nodosis, nodis in majori anfractu validis; cauda elongata.*

Fossile nelle argille azzurrognole della provincia d' Asti, ed è cosa particolare, che il medesimo si trovi fossile a Hordwell nell' Hamshire.

Il nostro benchè spezzato alla estremità della coda, ha ancora più di sei pollici di lunghezza, e due di altezza.

Gmelin pag. 3555, cita il *murex laevigatus*, che potrebbe in qualche modo ragguagliarsi col nostro *longaevus*; ma in quello la spira è striata per traverso, ed è più piccolo del nostro.

5. *Fusus, longaevis affinis, var. absque nodis.*

Il medesimo, ma privo di nodi. Egli fu preso nel medesimo luogo, ed ha la stessa misura, essendo anche rotto alla cima della coda.

6. *Fusus... altera longaevis varietas.*

Un risalto marginale, che sta all'orlo superiore dell'anfratto maggiore, e le coste che sono negli altri trasversalmente striati, distinguono la presente varietà, che è più corta delle altre, non avendo che 1 pollice e 8 linee di lunghezza: viene dal medesimo luogo.

Il *fusus* noè del sig. Lamarck potrebbe pareggiarsi col nostro, ma esso ha le strie trasversali nel primo anfratto, e nel nostro appena se ne scorgono alcuni rari indizj colla lente.

7. *FUSUS CONTRACTUS nob. Tav. I. fig. 12.*

*Testa hinc inde acuminata; anfractus convexis per longum striatis, costatis, transversim sulcatis, sutura multum incavata discretis.*

Fossile in Piemonte.

Viene distinto per mezzo di un notevole restringimento alla unione degli anfratti; e in quel cavo vi è un filetto, che fa tutto il giro della spira.

Forse esso sarà il *fusus aciculatus* del sig. Lamarck; ma quel celebre professore non parla di quella strettezza, che si trova alla unione degli anfratti, e che lo distingue particolarmente.

Lunghezza due pollici, 1 linea.

Vi è una varietà del medesimo, che vien priva di coste, e di quel filetto in fondo della cavità. Lunghezza 15 linee.

8. FUSUS.

*Murex rostratus* Brochi pag. 416.

Vive nell'Adriatico (Ginani, Olivi, ec.): fossile in Piemonte e nel Piacentino.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 177 n.º 1.

Lunghezza 2 pollici 1 linea.

9. FUSUS.

*Murex longiroster.* Brocchi pag. 418.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino, nelle Crete Sanesi e nelle colline Pisane.

Lunghezza 2 pollici 3 linee.

10. FUSUS.

*Murex fimbriatus* Brocchi pag. 419.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e altrove in Italia.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 180 n.º 15.

Lunghezza 2 pollici 9 linee.

Non mi occorre di toccar qui alcune differenze, che si scorgono nella presenza più o meno precisa delle lamelle trasversali, e nel loro numero in alcuni esemplari di molto minor dimensione, come di 9 linee di lunghezza, nè di altre differenze che sono di poco rilievo.

11. FUSUS AFER. Enciclop. metod. Tav. 426. fig. 6.

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 1 pollice.

## 12. FUSUS.

*Murex mitraeformis* Brocchi pag. 425.

Fossile nella valle d'Andona, e presso Castelacquato nel Piacentino.

Vi è un esemplare lungo un mezzo pollice, in cui gli anfratti hanno un principio di carena, con leggieri tubercoli in mezzo a picciole coste. La spira alla cima è glabra.

## 13. FUSUS.

*Murex subulatus*. Brocchi pag. 426.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Si deve notare che gli anfratti vengono separati da una incavatura lineare.

Lunghezza 1 pollice.

## 14. FUSUS TORNATUS nob. Tav. I. fig. 13.

*Testa obsolete striata; spira conica, elongata; anfractus fune sub convexa distinctis.*

Fossile allo stato spatoso, giallo; della collina di Torino.

Appena si scorgono strie perpendicolari ondegianti, e una linea incavata sotto un cordone separa gli anfratti. Vi è una varietà che ha il cordone nodoso.

Lunghezza 21 linee, benchè mancante ad una estremità.

## 15. FUSUS INTORTUS. Enciclop. metod. Tav. 441. fig. 6. parte 23.

*Testa transversim sulcata, per longum costata; apertura ovata, ad canalem coarctata.*

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 11 linee; ve ne sono di 6.



16. *Fusus rugosus*. Enciclop. metod. Tav. 423 fig. 6. parte 23.

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 19 linee, colle estremità un poco rotte.

17. *Fusus crispus nobis*.

Fossile in Piemonte.

*Testa costata transversim sulcata; plicis longitudinalibus fornicatis; labio intus sulcato.*

Avendo la forma elegante del *murex colus*, non occorre che io ne dia la figura; onde al primo aspetto lo presi per tale; o almeno per una varietà del medesimo. Ma osservando le strie longitudinali, che passando sopra i cordoni trasversali, vi formano pieghe rilevate, che gli danno un aspetto ricciuto, mi son risoluto a farne una specie particolare. Vi è un piccolo risalto di dette pieghe sopra il mezzo degli anfratti, che sembrano un poco carinati.

Lunghezza 1 pollice 9 linee; l'apice della coda è un poco rotto.

18. *Fusus*.

*Muricis rostrati n.º 8 var.*

Le coste come le strie trasversali hanno minori risalti, e la lamella della carena manca in alcuni esemplari.

Lunghezza 20 linee.

19. *Fusus lamellosus nob.* Tav. I. fig. 14.

*Testa costata; anfractibus lamellis cinctis, sutura incavata discretis.*

Queste lamelle trasversali cingono tutti gli anfratti e anche

la coda , che ascende verticalmente. Gli anfratti vengono separati per mezzo di un incavo profondo , e le coste al margine hanno un andamento a onde.

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 9 linee.

20. *Fusus dimidiatus nob.* Tav. I. fig. 15 (un poco ingrandita).

*Testa anfractubus inferius costatis , transversim striatis , superius glabris subincavatis ; filo medio distinctis.*

Fossile nell' Astigiana.

Il carattere , che ho preso dagli anfratti , che sono per metà ornati di coste e di strie trasversali mi pare preciso abbastanza per cui se ne possa fare una specie distinta: non ne ho trovato fuorchè un solo: e questo avendo la bocca un poco malconcia, non si può vedere se appartenga piuttosto al genere *Pleurotoma*. Ma il caso avendomene offerto altri esemplari , ho riconosciuto che egli era una varietà in piccolo che appartiene al *Pleurotoma* n.° 13 qui appresso.

Lunghezza 5 linee e mezza.

21. *Fusus undosus nob.* Tav. I. fig. 16.

*Testa crassiuscula ; anfractubus convexis , transversim sulcatis , longitudinaliter striato-costatis ; striis , costisque ad anfractuum commissuras undatim decurrentibus ; labio intus sulcato.*

Fossile in Piemonte.

I solchi del labbro destro , alcune volte due insieme , percorrono tutta la parte visibile dell' interiore , e vanno

ancora più avanti, come anche quelli dell'esteriore, dopo avere ricoperto la columella, si immergono dentro. Il nostro unico esemplare avendo alcune piccole rotture all'orlo del labbro, nella parte che si giugne all'anfratto, non saprei dire se ivi fosse una qualche slabbratura che di cotesto fuso ne facesse un pleurotoma.

Lunghezza 2 pollici 1 linea; altezza 1 pollice.

22. *FUSUS SUBULATUS nob.* Tav. I. fig. 17.

*Testa glaberrima; spira conica, elongata; basi inferius obsolete transversim striata; apertura ovato-oblonga ad canalem linearem ascendentem coarctata.*

Esso ha il labbro un poco rotto; con tutto ciò viene abbastanza distinto colla sua coda sottilissima, che dal restringimento dell'apertura si alza perpendicolarmente. Gli anfratti quasi piani sembrano liscii.

Lunghezza 10 linee.

23. *FUSUS TRIPPLICATUS nob.* Tav. I. fig. 18 (ingrandita).

*Testa longitudinaliter costata, costis se se decussantibus, transversim striata; cauda ascendente; columella triplicata.*

Fossile nell'Astigiana.

Il sig. Lamarck ha fatto un *fusus biplicatus*, al quale il nostro, che ha tre pieghe ben espresse alla columella, e anche una quarta più piccola verso la base, molto si avvicina.

Lunghezza 6 linee.

24. *FUSUS AMPULLA nob.* Tav. I. fig. 19 (ingrandita).

*Testa crassiuscula, ovata fusiformis; anfractus transversim minute striatis, versus apicem costatis; apertura ad caudam subinflexam coarctata.*

Fossile in Piemonte.

Non male rassomiglia al *murex amphora* del n.º 37 del genere precedente, quanto alla forma esteriore. Quello sarebbe forse meglio collocato fra i fusi, come questo potrebbe essere annoverato nel genere *pyrula*. Ma appunto per mancanza di alcuni caratteri significanti in ambidue questi fossili, rimane dubbioso il genere a cui appartengono.

Ampio è il primo anfratto; esso si restringe a un tratto presso la columella, e una fascia liscia pare che siavi alla commessura degli anfratti.

Lunghezza 8 linee.

25. *Fusus*.

*Murex gracilis* Brocchi pag. 437.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

## GENERE XXIII. *PYRULA*.

### I. *PYRULA*.

*Bulla fuscus* Linn. V. Brocchi pag. 280.

Abita nell'oceano Indiano ed Americano (Linn.). Fossile non raro in Piemonte, nel Piacentino e nella Toscana.

Si deve notare, che in un medesimo esemplare, che abbia strie trasversali e longitudinali, si ravvisano fra le trasversali ora tre filetti, come osservò il sig. Brocchi, ora

due solamente o uno verso la base della conchiglia. Alcuni esemplari ne hanno fra le strie trasversali tre, quattro e anche di più.

Lunghezza 2 pollici 11 linee.

Vi è una varietà del medesimo, più piccola, di 1 pollice 3 linee, con un solo filetto tra le linee trasversali. Alcuni esemplari sono uniti ad altri testacei nell'argilla azzurrognola.

Ne abbiamo allo stato spatoso sepolti nell'arena indurita, che forse si potrebbero ragguagliare alla *bulia ficoïdes* di Brocchi.

2. PYRULA FASCIATA nob. Tav. 1.<sup>a</sup> fig. 20.

*Testa fasciata, aufractu majori ventricosus, fasciis transversis, subcarinatis ornato; superius planato, reliquis brevibus, subconvexis.*

Fossile in Piemonte.

Al primo aspetto delle fascie trasversali, questo sarebbe preso per un *Dolium*: ma vi mancano gli altri caratteri. Fra una fascia e l'altra nell'anfratto maggiore vi sono delle strie le quali sembrano andare moltiplicandosi in numero sino al principiare del secondo; negli altri ve n'è una sola. Lo abbiamo anche allo stato spatoso.

Lunghezza 1 pollice 7 linee. Altezza 13 linee: alcuni esemplari sono soltanto di 9 linee in lunghezza.

GENERE XXIV. *PLEUROTOMA*.1. *PLEUROTOMA*.

*Murex cataphractus* Brocchi pag. 427.

Fossile nel Piemonte, nel Piacentino, nel Sanese, a Parlascio e a monte Biancano nel Bolognese.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 180. n.° 17.

Lunghezza 2 pollici 8 linee.

2. *PLEUROTOMA*.

Varietà del precedente colla carena nodosa. Notisi che i grani sono più apparenti in tutta la conchiglia, che è più piccola, e che in alcune compare una piega trasversale nella columella.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 182. n.° 18.

Lunghezza 1 pollice e mezzo; alcuni giungono appena al pollice.

3. *PLEUROTOMA*.

*Murex intortus* Brocchi pag. 427.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 2 pollici 4 linee.

Lo abbiamo anche allo stato spatoso.

4. *PLEUROTOMA*.

*Murex reticulatus* Brocchi pag. 435.

Fossile in Piemonte e a Parlascio in Toscana.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 182. n.° 3.

V. il pleurotoma dentato di Lam. Ann. del Mus. Tom. 7 pag. 242, col quale il nostro ha qualche analogia.

Lunghezza 21 linee.



## 5. PLEUROTOMA.

*Murex rotatus* Brocchi pag. 434.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e nelle Crete Sanesi.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 177 n.º 2.

Lunghezza 1 pollice 5 linee.

## 6. PLEUROTOMA.

Varietà del precedente?

Si distingue per mezzo di un risalto granoso, che cinge la connessione di un anfratto coll' altro.

Lunghezza 10 linee.

## 7. PLEUROTOMA.

*Murex calliope* Brocchi pag. 436.

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 1 pollice.

## 8. PLEUROTOMA.

*Murex interruptus* Brocchi pag. 433.

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 2 pollici.

## 9. PLEUROTOMA.

*Murex oblongus* Renieri. V. Brocchi pag. 429.

Abita nell'Adriatico: fossile in Piemonte, nel Piacentino e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 1 pollice  $\frac{1}{2}$ . Lo abbiamo anche allo stato spatoso.

Vi è la varietà *exquisite transversim striata*.

## 10. PLEUROTOMA.

*Murex contiguus*. Brocchi pag. 433.

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sancesi.

Lunghezza 1 pollice e 4 linee.

11. PLEUROTOMA.

Varietà del precedente?

Oltre le strie regolari, benchè sottili, e visibili colla lente, che cingono le parti superiori incavate di tutti gli anfratti, vi sono delle rughe longitudinali, ondegianti, che fanno angolo sopra il cingolo granoso di mezzo. La parte inferiore dell'anfratto maggiore è come craticolata dall'incontro delle strie longitudinali con i solchi trasversali.

Lunghezza 1 pollice 7 linee.

12. PLEUROTOMA.

*Murex dimidiatus* Brocchi pag. 431.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e in altri luoghi d'Italia.

Fra i nostri esemplari, alcuni hanno la base dell'anfratto maggiore fortemente solcata per traverso, con uno o due filetti interposti. La carena degli anfratti ora è granosa; in alcuni altri essa è a coste assai prominenti con la parte superiore un poco incavata; e in quel sito le strie seguitando l'andamento delle coste sono ondegianti.

Lunghezza 2 pollici; ve ne sono di 10 linee soltanto.

13. PLEUROTOMA.

Varietà del precedente?

*Testa fusiformis transversim striata, longitudinaliter nodoso-costata; anfractus superne sub incavatis, cavitate undatim striata, funiculo distinctis.*

Nel precedente, i papilli che coronano la carena dell'anfratto maggiore, poco a poco diventano nodi, e poi coste longitudinali, ma conservano sempre la parte superiore degli anfratti un poco incavata, e striata a onde; in questi le coste longitudinali sono ben espresse, e la carena è annulata. La parte incavata e striata degli anfratti è la medesima, e un piccolo cordone li divide sino all'apice. La coda è breve e un poco incurva.

Lunghezza da 1 pollice 4 linee sino a 4 linee soltanto.

14. PLEUROTOMA.

*Murici reticulato* n.<sup>i</sup> 4 *affinis*. Brocchi pag. 435.

Fossile allo stato spatoso sulla collina di Torino.

Differisce da quello del n.<sup>o</sup> 4 in quanto che questo viene tutto ricoperto da molte piccole coste longitudinali; appena anche colla lente si scuoprono strie trasversali alla base.

Lunghezza 17 linee.

15. PLEUROTOMA TURBIDA. V. Enciclop. met. Tav. 439. fig. 7. parte 23.

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 11 linee.

## GENERE XXV. CERITHIUM.

### 1. CERITHIUM.

*Murex varicosus* Brocchi pag. 440.

Fossile nella valle d' Andona, a Pontadera, a Lari in Toscana, e nelle Crete Sanesi.

Alcuni dei nostri esemplari hanno due serie di nodi variciformi presso la sutura.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctariūm pag. 175 n.º 9.*

Lunghezza 2 pollici, 8 linee.

2. CERITHIUM LINEATUM nob. Tav. 1.<sup>a</sup> fig. 21.

*Testa crassa, turrata; anfractibus longitudinaliter obsolete costatis, glabris, lineis tribus incavatis cinctis; inferne striata, columella uniplicata.*

Fossile in Piemonte.

La conchiglia è più tosto fitta; le linee di cui gli anfratti sono cinti formano come quattro fascie piane, che vengono divise da incavazioni longitudinali, le quali ne fanno delle coste appianate.

Lunghezza 2 pollici, 7 linee, benchè sia spezzata alle due estremità. Altezza 1 pollice.

3. CERITHIUM CONOIDEUM Lam.?

Questo cerite rassomiglia assai a quello del professore Lamarck detto *Conoideo*. Vi è da osservare, che nei due anfratti inferiori, quella delle tre strie granose, che si trova più vicina a quella che è quasi tuberculata, è più ristretta; i grani sono più piccioli, e alcune strie ondeggianti li solcano longitudinalmente.

Fossile in Piemonte e a Grignone.

4. CERITHIUM.

*Murex margaritaceus?* Brocchi pag 447.

Fossile nella valle d'Andona e nelle Crete Sanesi.

Il nostro esemplare, che non oltrepassa 1 pollice di

lunghezza, e che in molte cose si ragguaglia col murice del lodato autore, ha di più una cavità stretta ma incavata alla separazione degli anfratti, con alcune varici ondegianti, che cingono l'anfratto maggiore.

5. CERITHIUM.

*Murex tricinctus* Brocchi pag. 446.

Fossile nella valle d'Andona e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 1 pollice 9 linee.

6. CERITHIUM GRANOSUM nobis.

*Testa conica; anfractus seriatim nodosis, serie granosa interposita.*

Fossile nella valle d'Andona.

Gli anfratti, che tra loro vengono divisi per mezzo di una linea, hanno ciascuno una serie di nodi; e in mezzo sta una serie di grani più o men bene espressi.

Lunghezza 11 linee.

7. CERITHIUM COSTATUM nob. Tav. 1.<sup>a</sup> fig. 22.

*Testa crassiuscula; anfractus longitudinaliter costatis, costis ad suturam subnodosis; apertura ovata, varice opposita; cauda brevi subinflexa; labio sursum fisso.*

Lo strofinamento che ha sofferto questo testacchio impedisce di vedere le strie che aveva forse trasversalmente, mentre le coste longitudinali sono rilevate; e una linea che le divide verso la sutura, ivi forma nodi trasversali.

8. CERITHIUM.

*Murex crenatus* Brocchi pag. 442.

Fossile nell' Astigiana , nel Piacentino , e a Parlascio in Toscana.

Lunghezza 1 pollice 10 linee.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 175 n.º. 7.*

9. CERITHIUM , *an praecedentis var. anfractibus margine granosis , medio costatis , costis versus apicem confertis.*

Le strie granose, trasversali, meno espresse, vanno spianandosi poco a poco, sino a diventare quasi delle fascie, mentre le coste rare nell' anfratto maggiore, crescono in numero negli anfratti minori sino all' apice.

10. CERITHIUM NODOSUM *nob.* Tav. I. fig. 23.

*Testa conica, crassiuscula, transversim striata; anfractibus medio nodoso-muricatis, nodis minoribus marginalibus.*

Fossile in Piemonte.

Non posso parlare della apertura nè della coda di questo fossile, essendo i nostri esemplari malconci in quelle parti.

Lunghezza 1 pollice 11 linee; altezza 9 linee.

11. CERITHIUM *praecedentis var.*

Pare una varietà del nodoso, di minor dimensione, non avendo se non 13 linee di lunghezza.

Fossile allo stato spatoso sulla collina di Torino.

#### GENERE XXVI. *Trochus.*

1. TROCHUS CIGAS *nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 1 (ridotta alquanto).

*Testa conica recta, spira anfractibus subplanatis; modulus argillaceus induratus, superstite testa.*



Fossile nelle colline di Tortona.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 168 n.° 1.*

Questo è propriamente un modulo di argilla azzurrognola indurito, e ricoperto in alcuni luoghi dalla conchiglia medesima bianca, e in altri da efflorescenza di solfato di ferro gialliccio. La figura lo mostra nelle parti di sopra e di sotto: in questa ultima la spira termina con un ammasso di quella argilla indurita. Le sue dimensioni sono grandi, poichè, anche essendo spezzato, il suo diametro è di 7 pollici e mezzo, con  $\frac{1}{4}$  incirca di altezza.

2. *TROCHUS INFUNDIBULUM* Brocchi pag. 352.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino, a S. Geminiano e a Libiano in Valdera.

Diametro 3 pollici 9 linee; altezza 2 pollici  $\frac{1}{2}$ .

3. *TROCHUS AGGLUTINANS* Lam. V. Brocchi pag. 358.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino, a S. Geminiano in Toscana, ed è raro nell'oceano Americano australe (Linn.).

V. Davila, Catalogo Tom. 3, pag. 92, art. 125.

I nostri esemplari, per essere spatosi e sepolti nell'arena indurita, dalla quale non si possono staccare, non lasciano vedere la base inferiore. Essi hanno sino a 3 pollici di diametro e quasi due di altezza. Uno però sgombrato da quella arena è privo di umbilico.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 168 n.° 2.*

4. *TROCHI praececedentis varietas, basi granulata usque ad umbilicum; limbo laciniato.*

Fossile nella valle d' Andona.

Diametro 1 pollice.

5. *TROCHUS TURGIDULUS?* Brocchi pag. 353.

Fossile in Piemonte.

Diametro 4 linee. V. Listero Tav. 621. Egli conserva vestigie del suo antico colore.

6. *TROCHUS PATULUS*. Brocchi pag. 356.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e nel Bolognese.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 169 n.º 8.*

Ne abbiamo le due varietà, e anche allo stato spatoso. Egli conserva tuttora delle vestigie del suo antico colore.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 169 n.º 8.*

7. *TROCHI VORTICOSI modulus lapideus superstite testa.*  
V. Brocchi pag. 357.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 169 n.º 9.*

Esso viene ricoperto di grani finissimi di serpentina verde, e il modulo di 15 linee di diametro è gialliccio.

Fossile al lido del mare a Nizza.

8. *TROCHUS MAGUS* Linn. V. Listero Tav. 441 fig. 22.

Fossile nella valle d' Andona.

9. *TROCHUS CARINATUS nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 2.

*Testa conica, crassiuscula; anfractus margine inferiori carinato, altero subconvexo.*

Fossile sulla collina.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 166 n.º 6.*

Si osserva, che due sono le carene dell' anfratto maggiore: una in comune cogli altri anfratti, l'altra sta all' orlo

inferiore, e un piano esiste tra l'una e l'altra. La columella ha una espansione, che ne ricuopre quasi i due terzi. Questo troco è tutto spatoso; la bocca è zeppa di arena serpentinoso indurita, e benchè in tale stato segliano scomparire parecchi caratteri, nulla di meno delle strie trasversali si manifestano in alcuni nostri esemplari; per la medesima ragione il disegno non può essere che approssimantesi: e fra i nostri esemplari, non ve ne sono due che sieno perfettamente uguali in tutto.

Diametro 16 linee, altezza 12.

10. *Trochus conico-depressus: anfractubus striatis, margine superiori subcostatis; majori oblique umbilicato, ad aperturam versus ascendente.*

Fossile in Piemonte.

Questo potrebbe essere una varietà del *trochus magus* n.º 11, col quale ha molta affinità, all'eccezione però che il lembo inferiore della base dell'apertura si alza maggiormente in questo che in quello.

Diametro 8 linee.

11. *Trochus fimbriatus nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 3, di cui la parte superiore *b* è stata ingrandita alquanto.

*Testa conico-depressa; anfractubus subincavatis, arcuatim eleganter striatis; margine inferiori spinoso, spinis distantibus fimbriatis; altero granoso; basis margine incavata, spinarum duplici serie donata.*

Fossile nell'Astigiana, entro una argilla cerulea indurita.

I tre esemplari, che abbiamo di quest'elegante troco,

sono in parte mutilati. In uno si osserva intorno all'umbilico chiuso una serie di grani; in un altro ve ne sono due serie allo stesso luogo; e nel terzo esemplare tre serie di grani esistono attorno al margine superiore degli anfratti, e i più grossi si vedono presso la sutura. Del resto l'antica madreperla si trova ancora con tutta la sua bellezza sotto la pellicola bianca, che ricuopre tutto quel fossile. Sarebbe cosa desiderabile di rinvenire quella conchiglia nella sua integrità.

Diametro 1 pollice.

12. *TROCHUS CINERARIUS* Linn. V. Brocchi pag. 355.

13. *TROCHUS FUNICULATUS* nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 4.

*Testa conica umbilicata, anfractubus sulcatis, subincavatis; margine superiori funiculato.*

Fossile nel contado di Nizza.

Non propriamente solehi, ma più tosto fili circolari ornano questo fossile, e tra l'uno e l'altro si ravvisano strie finissime longitudinali, eccetto forse alla base, dove i fili ravvicinati non hanno pressochè niun intervallo frapposto. Del resto il fossile è gialliccio, ferruginoso, spatoso, malconcio in più luoghi, e involto in tenuissima arena indurita.

Diametro 1 pollice.

14. *TROCHUS depressus*, nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 5.

*Testa conico-depressa; anfractubus convexis, sulcatis; testa spatosa, superstite testa.*

Fossile nel contado di Nizza.

Una depressione ossia incavatura si trova al luogo dell'ombilico; una finissima arena riempie l'apertura, e vi rimangono in alcuni esemplari vestigie dell'antica madreperla.

Diametro 7 linee.

15. *TROCHUS GRANOSUS nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 6.

Fossile in Piemonte.

*Testa conica; anfractubus granosis, granis ad suturam majoribus, inferius tegullulis imbricatis marginatis.*

Non posso parlare della base nè della bocca: queste parti malconcie non avendo conservato fuorchè quanto può bastare per costituire il genere. Il cordone del margine inferiore degli anfratti, sembra composto più tosto a foggia di picciole tegole imbricate: il restante essendo ricoperto di grani disposti in serie, i quali dal margine inferiore vanno crescendo sino alla sutura. Egli conserva ancora sotto la corteccia bianca, vestigie della antica sua madreperla.

16. *TROCHUS NODOSUS nob.*

*Testa conica; anfractubus planatis, nodorum serie duplici signatis, nodis quandoque geminatis; basi sulcata.*

Fossile nel contado di Nizza.

Grossolani e non bene distinti sono i suoi caratteri, essendo questo fossile passato allo stato di spato calcareo lamellare indurito.

Diametro alla base 11 linee; altezza idem.

17. *TROCHUS IMBRICATUS nob.*

*Testa conica; anfractubus planatis, striatis, imbricatis.*

Fossile allo stato di spato duro, della Contea di Nizza.

Gli anfratti sembrano altrettanti imbottatoj messi gli uni negli altri. Il modulo interno è pressochè divenuto marmo.

Diametro della base 1 pollice; altezza 15 linee.

18. *TROCHI AGLUTINANS* n.<sup>i</sup> 3 *altera varietas? basi arcuatim striata; anfractus arcuatim rugosus; margine ampliori conchilifera laciniata.*

Diametro lin. 6.

NB. Il porto Limpia o Santa Ricuperata a Nizza ci hanno somministrato alcuni moduli di trochi forse di nuova specie, di cui non credo dover parlare, perchè non hanno caratteri abbastanza precisi.

## GENERE XXVII. *SOLARIUM*.

### 1. *SOLARIUM*.

*Trochus pseudo perspectivus*. Brocchi pag. 359.

Fossile in Piemonte, in Valdera nella Toscana, presso Siena, nel Piacentino e al monte Biancano nel Bolognese. La sua patria è ignota.

Diametro 10 linee: altri esemplari hanno una minore dimensione.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 168 n.<sup>o</sup> 3.

### 2. *SOLARIUM*.

*Trochus variegatus* Linn. V. Brocchi pag. 360.

La sua patria è ignota. Fossile in Piemonte e nel Piacentino.



## 3. SOLARIUM SULCATUM nob.

*Testa conico depressa; anfractus superius sulcatis, sulcis subgranulatis.*

Fossile in Piemonte.

Essendo spatoso, esso manifesta solamente alcuni caratteri. La base somiglia assai al *trochus pseudo perspectivus* del n.º 1; ma la parte superiore degli anfratti è tutta sulcata e i solchi dalla metà in su verso l'apice sono granosi.

Diametro 11 linee.

4. SOLARIUM NODOSUM nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 7 (ingrandita).

*Testa conico-depressa; anfractus sulco incavato distinctis, margine funiculatis; basi nodis radiatim oruata, carinata, carina acuta inter duas cavitates extante.*

Fossile in Piemonte.

Essendo anche questo allo stato spatoso come il precedente e il seguente, noterò soltanto quei caratteri di questi fossili, che rimangono, i quali sono abbastanza palesi per non passarli sotto silenzio.

L'umbilico pieno di materia terrosa indurita non compare. Da esso partono nodi che si dirigono alla periferia, la quale termina con una carena acuta in mezzo a due solchi incavati. Nella parte superiore poi si vede soltanto un solco che divide gli anfratti, e questi sembrano avere al margine un cordone granoso.

Diametro 9 linee.

5. SOLARIUM RADIATUM nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 8 (ingrandita).

Fossile in Piemonte.

*Testa conico-depressa; costis ab umbilico ad periferiam duplici granorum ordine ornatam radiantibus; anfractus fere contiguos duplici granorum serie ad marginem distinctis; anfractu majori carinato, carina subgranosa.*

Gli anfratti eccetto il grande sono striati, e questo pare rugoso trasversalmente.

Diametro 8 linee.

## GENERE XXVIII. *TURBO*.

1. *TURBO RUGOSUS* Linn. V. Brocchi pag. 362.

Fossile in Piemonte e in molti altri luoghi dell'Italia. Abita nell'Adriatico, nel Mediterraneo e nella nuova Zelanda (Linn.).

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 165 n.º 5.*

2. *TURBO idem, varietas depressa, anfractus spinis fornicatis.*

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

## GENERE XXIX. *MONODONTA*.

1. *MONODONTA*.

*Trochus tessellatus* Linn. pag. 3583.

Fossile in Piemonte ove conserva molte vestigie dell'antico suo colore e della sua madreperla.

Non so se mi verrà rimproverato di collocare in questo

genere il troco di cui si tratta, perchè un picciolo dente si manifesta alla sua columella, in vece del *trochus labio* che lo ha in modo più espresso. V. Born. Mus. Vind. Tav. 12 fig. 5, 6.

### GENERE XXX. *CYCLOSTOMA*.

#### 1. *CYCLOSTOMA*.

*Turbo lincina* Linn.? pag. 3605. V. Listero Tav. 26 fig. 24.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 167 n.º 2.

#### 2. *CYCLOSTOMA OBTUSUM*. Draparnéau Tav. 1 fig. 14.

Benchè io mi astenga di collocare le conchiglie di acqua dolce fra le fossili, faccio però eccezione per queste due, avendole trovate nelle medesime circostanze geologiche delle marine, e con esse mescolate.

### GENERE XXXI. *SCALARIA*.

#### 1. *SCALARIA*.

*Turbo lamellosus* Brocchi pag. 379.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 175 n.º 12.

#### 2. *SCALARIA*.

*Turbo clathrus* Linn. pag. 3603. V. Brocchi pag. 378.

Abita nel mediterraneo, nell' Atlantico, nel mare delle Indie (Linn.) e nell' Adriatico (Ginani, Olivi ec.). Fossile

in Piemonte, a S. Miniato nel Sanese, nelle colline Volterrane e nel Piacentino.

Uno dei nostri esemplari ha i cancelli ossia le piccole coste longitudinali appena apparenti, e più ravvicinate.

3. SCALARIA FIMBRIATA *nobis* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 9 (un poco ingrandita).

*Testa turrata, anfractubus subconvexis, costatis, costis longitudinalibus planatis, ad suturam incavatam spinosis, costarum intermediis circinatis; ore ovali, varicibus oppositis.*

Fossile in Piemonte.

Grande è la sua analogia col *Turbo puniceus* di Brocchi pag. 380. Ma il nostro non ha i più piccioli indizii di solchi trasversali, osservati in quello. La sutura degli anfratti è incavata, e a quella finiscono in punte acute le coste appiattite longitudinali. Fra una costa e l'altra compare una lamella, che dirigendosi dall'una all'altra vi forma altrettanti triangoletti vuoti.

Lunghezza 8 linee.

4. SCALARIA.

*Turbo retusus* Brocchi pag. 380.

Fossile in Piemonte e nel monte di S. Luca presso Bologna.

*Testa crassa, glabra, subturbinata; anfractubus oblique costatis, costis lamellaribus ad os orbiculare crassum coeuntibus, ultimo ampliori.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 10.

Credo pregio dell'opera il riferire qui alcune osservazioni,

al proposito di quei pochi esemplari che abbiamo. In alcuni le coste sono compatte, ed in altri a lamelle, e quella che più vicina si trova alla bocca qualche volta è molto spessa, come anche quella parte della conchiglia. Le coste manifestano, ma non sempre, un piccolo nodo verso la loro metà, e allora esse soffrono nella loro parte superiore una incavatura. Tutti sono spatosi e alcune volte l'apice è acatino.

V. *Comm. Bonn. Vol. 11 parte 2 pag. 296 fig. 8.*

*Davila cat. Tom. III Tab. 2 fig. F.*

*Knorr. délices des yeux et de l'esprit. Tom. IV pl. XXVI fig. 6 ?*

Lunghezza 13 linee.

5. *SCALARIA INTERRUPTA nob. Tav. 2 fig. 18.*

*Testa turrata crassiuscula; anfractibus fovea distinctis, transversim sulcatis, longitudinaliter sulco obliquo interruptis; apertura rotunda, integra.*

Fossile in Piemonte.

Una sorta di fossa ossia un incavo separa gli anfratti; essa è più larga verso la base: le fascie un poco convesse di essi, che vengono solcate per traverso, sono composte di lamelle sottilissime longitudinali: queste lamelle si vedono ancora intorno alla apertura che è spessa, e solcata trasversalmente al di fuori. Del resto poi essa non è senza una qualche rassomiglianza col *turbo lamellosus* di Brocchi.

Lunghezza 17 linee.

GENERE XXXII. *TURRITELLA*.1. *TURRITELLA*.

*Turbo tricarinatus* Brocchi pag. 374.

Fossile nel territorio di Tortona ove si trova in uno stato di migliore conservazione che nella valle d'Andona. Fossile anche nel Piacentino, nel Reggiano e a San Giusto presso Volterra. Si trova anche allo stato spatoso sulla collina di Torino.

Lunghezza da 9 linee sino a 2 pollici e 4 linee.

2. *TURRITELLA*.

*Turbo imbricatus* Linn. pag. 3607 ?

Abita verso le isole dell'America (Linn.): fossile in Piemonte e allo stato spatoso sulla collina di Torino.

*Testa turrita; anfractus planatis, sulco distinctis, obsolete striatis, deorsum imbricatis.*

Lo strofinamento ne scancellò alquanto i caratteri, come sono le strie trasversali, che meglio si ravvisano negli esemplari più grossi, e in quelli che sono allo stato spatico: di questi ultimi ne abbiamo di 1 pollice di diametro alla base: alcuni hanno gli anfratti più o meno convessi o appianati: tutti sono della collina.

Lunghezza 3 pollici, 9 linee.

3. *TURRITELLA*.

*Turbo subangulatus* Brocchi pag. 374.

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sanesi.

Notisi, che in alcuni nostri esemplari, non resta ben



distinta la stria di mezzo, che deve essere la più prominente, e che in altri un filetto rilevato, che accompagna immediatamente un leggero incavo ne separa gli anfratti: questo sarebbe il *turbo marginalis* di Brocchi pag. 373; ma quell'incavo è striato come il rimanente degli anfratti, e inoltre vi è poi anche la carena in mezzo. In somma questa specie va soggetta ad alcune varietà.

Lunghezza 1 pollice ed anche 2  $\frac{1}{2}$ .

4. TURRITELLA.

*Turbo acutangulus* Linn. Brocchi 368.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino, nelle Crete Sanesi e nel Reggiano. Abita i lidi del Tranquebar (Linn.).

Lunghezza da 4 linee sino ad 1 pollice e 5 linee.

5. TURRITELLA.

*Turbo replicatus?* Linn. pag. 3606. Brocchi pag. 365, aut *Turbo marginalis*, pag. 373.

*Testa turrata, anfractibus leviter striatis, sursum imbricatis; margine subplanato.*

È da notare, che immediatamente sotto quella sutura ove gli anfratti sono imbricati, il margine è un poco appianato.

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza da 11 linee sino a 2 pollici e mezzo.

6. TURRITELLA.

*Turbo triplicatus* Brocchi pag. 369.

Fossile in Piemonte e nella Toscana.

Lunghezza 3 pollici e più.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium* pag. 174 n.° 2.

## 7. TURRITELLA.

*Turbo tornatus* Brocchi pag. 372.

Fossile molto comune in Piemonte. Si trova anche nel Piacentino.

Lunghezza 3 pollici e più.

## 8. TURRITELLA.

*Turbo varicosus* Brocchi pag. 374.

Fossile in Piemonte e a Monterigioni nel Sanese.

Lunghezza 2 pollici, 7 linee.

## 9. TURRITELLA.

*Turbo vermicularis* Brocchi pag. 372.

Fossile in Piemonte e a San Miniato.

Alla descrizione del lodato autore fa d'uopo aggiungere, che il quarto cingolo superiore degli anfratti, oltre di essere più picciolo degli altri, sta più vicino e quasi unito al terzo: questo si osserva nei nostri esemplari.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 174 n.º 3.*

Una varietà offre il sito tra un cingolo e l'altro occupato da una o più strie. Si possono anche considerare come varietà del medesimo, alcuni nostri esemplari in cui strie rilevate e rotunate al numero di cinque e più cingono gli anfratti: ma minori sono quelle che s'avvicinano alla sutura incavata.

Lunghezza da 9 linee sino a 3 pollici  $\frac{1}{2}$ .

10. TURRITELLA TRICINCTA nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 11 (ridotta).

*Testa turrita, anfractus planatis, subtiliter trinitis, fasciis tribus planis cinctis.*

Fossile in Piemonte.

Ne' sei anfratti superiori, le tre fascie piane sono pressochè liscie, e quella di mezzo rimanendo prominente, ivi forma un angolo. Questo unico esemplare, benchè spezzato alla base, ha ancora 3 pollici di lunghezza.

11. *TURRITELLA FASCIATA nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 12 (ridotta).

*Testa turrata; anfractubus fasciatis, fascia planata sulcis duobus intermediis.*

Fossile allo stato spatoso nei contorni di Torino.

Questo stato, e la sabbia indurita da cui viene ricoperta non lasciano vedere altri caratteri. Diminuendosi le fascie spianate alla parte superiore, più vicini rimangono i solchi da cui gli anfratti vengono separati.

Benchè spezzata alle due estremità, la lunghezza resta ancora di 4 pollici e 4 linee.

12. *TURRITELLA.*

*Turbo terebra* Linn? pag. 3608.

Fossile allo stato spatoso sulla collina di Torino, e nel Piacentino. Abita nell'Atlantico e nell'Adriatico.

13. *TURRITELLA FUNICULATA nob.* Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 13 (ridotta).

*Testa turrata; anfractubus subplanatis, funiculis tribus cinctis, medio elatiori.*

Fossile allo stato spatoso nei contorni di Torino.

Benchè approssimantesi alla precedente, essa però ne viene distinta per mezzo della fascia piana che separa i tre cordoni, la quale viene un poco imbricata all'ingiù; e come quella, essa è un poco rotta alle due estremità.

Lunghezza 3 pollici  $\frac{1}{2}$ .

## 14. TURRITELLA.

*Turbo plicatulus* ? Brocchi pag. 376.

Fossile in Piemonte e a San Giusto presso Volterra.

Lunghezza 3 linee  $\frac{1}{2}$ .

## 15. TURRITELLA.

Var. del *turbo acutangulus* n.º 4 in cui una stria più rilevata delle altre cinge gli anfratti nella parte inferiore.

Lunghezza 6 linee.

## 16. TURRITELLA.

Var. del *Turbo tricarinatus* in cui un filetto rilevato scorre in mezzo ai tre cordoni.

Lunghezza 10 linee.

## 17. TURRITELLA.

*Turbo marginalis* ? Brocchi pag. 373.

*Testa turrata; anfractus planatis striatis, striis tenuibus, majoribus elevatis, sursum imbricatis, deorsum ad suturam subplanatis.*

Fossile in Piemonte e nelle Crete Sanesi.

Lunghezza 2 pollici  $\frac{1}{2}$ .

18. TURRITELLA GRANOSA nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 19 (ingrandita).

*Testa turrata, glabra; anfractus cingulis rotundatis tribus, medio majori distinctis, subgranosis.*

Fossile in Piemonte.

I cingoli o più tosto i cordoni bene distinti, che cingono gli anfratti, si vedono granosi colla lente, e minutissime strie trasversali gli ornano nella parte superiore, e non nella inferiore, ove più ravvicinati sono i cordoni.

Lunghezza 6 linee.

## 19. TURRITELLA.

*Turbo imbricatus* ? Linn.

*Testa turrata; anfractus laxe striatis, sursum imbricatis; margine inferiori elatiori, funiculata.*

Fossile allo stato spatoso sulla nostra collina.

Lo tengo per una varietà del *turbo imbricatus* di Linneo in cui il margine inferiore, crescendo poco a poco, forma un risalto elevato a foggia di un cordone: esso è un poco mutilato.

## 20. TURRITELLA IMBRICATARIA Lam.

Fossile nella sabbia serpentinosa, nei contorni di Torino: egli è lo stesso di Grignone; colla differenza che è meno consistente.

## 21. TURRITELLA BISULCATA nob.

*Testa turrata; anfractus planatis, sulcis duobus approximatis distinctis.*

Fossile allo stato spatoso sulla collina.

Rassomiglia a un cono allungato, nel quale gli anfratti vengono separati solamente da due piccoli solchi.

Lunghezza 10 linee.

## GENERE XXXIII. BULLA.

## 1. BULLA AMPULLA Linn. pag. 3424.

Abita nell' Oceano Indico, Etiopico, e Americano (Linn.): fossile in Piemonte.

Lunghezza 16 linee: altezza 11.

TOM. XXVI.

X x

2. *BULLA STRIATA* Brocc. pag. 276.

Abita nell' Adriatico, e nel Mediterraneo: fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 4 linee.

3. *BULLA OVULATA*? Lam. V. Brocchi pag. 277.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 6 linee.

GENERE XXXIV. *ACHATINA* (1)?1. *ACHATINA*.

*Bulla Achatina* Linn. pag. 3431.

Abita nell'Oceano Americano. Fossile in Piemonte.

In alcune delle figure citate da Linneo la columella viene ricoperta da una espansione, ma non tengo ciò per un carattere: la nostra in sua vece ha una apertura leggermente umbilicata e in tutta la conchiglia vi sono vestigie dell'antico suo colore. Listero Tav. 579 fig. 34.

Lunghezza 2 pollici 2 linee.

GENERE XXXV. *MELANIA*.1. *MELANIA INFLATA* nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 14.

*Testa turrata, laevis, anfractibus subplanatis, superioribus linea sulcatis; apertura ovato-oblonga.*

---

(1) Lamarck système des animaux sans vertèbres. 1802. Paris. pag. 91.



Fossile allo stato spatoso nei contorni di Torino.

Io l'ho presa al primo sguardo per un esemplare gigantesco della *helix subulata* di Brocchi pag. 305. Ma la nostra è più conica che cilindrica, gli anfratti superiori sono rigati da linee trasversali e l'apertura è più dilatata alla base.

Lunghezza 14 linee.

#### GENERE XXXVI. *AURICULA*.

1. *AURICULA INFLATA* nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 15.

*Testa subovata, anfractus transversim sulcatis, longitudinaliter minutissime striatis, reliquis brevibus, sulculo incavato distinctis; columella uniplicata.*

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 9 linee.

2. *AURICULA*.

*Voluta tornatilis* Brocc. pag. 322, 643.

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e a San Giusto presso Volterra.

Lunghezza 3 linee: ma sulla collina, e allo stato spatoso essa giunge sino a 9 linee.

3. *AURICULA BIPPLICATA* nob. Tav. 2.<sup>a</sup> fig. 16.

*Testa oblonga, transversim sulcata; anfractus convexis, columella biplicata.*

Fossile in Piemonte.

Lunghezza 5 linee.

GENERE XXXVII. *AMPULLARIA*.1. *AMPULLARIA PATULA*? Lam.

Fossile allo stato spatoso sulla collina di Torino.

Lo stato in cui si trova e la sabbia indurita che la ricuopre in gran parte non permettono di osservare tutti i suoi caratteri.

Lunghezza 1 pollice e 8 linee.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 167 n.º 3.*

2. *AMPULLARIA* V. Listero Tav. 1027 A?

*Testa globosa, umbilicata; spira eximia, profunde incavata.*

Fossile a Tortona, e nello stato spatoso nei contorni di Torino.

Si potrebbe ragguagliare alla *ampullaria canaliculata* di Lam. di cui però l'autore non dà la figura.

*Ad Oryctograph. Pedem. auctarium pag. 167 n.º 1.*

Lunghezza varia da 7 linee a 14.

3. *AMPULLARIA* V. Listero Tav. 568 n.º 19?

*Testa globoso-ovata, umbilicata, subtilissime per longum striata; spira exserta, scalariformi.*

Fossile a Tortona.

Lunghezza 16 linee.

4. *AMPULLARIAE* simili a quella del n.º 2 all' eccezione che queste non hanno la spira incavata. V. Listero Tav. 1027 fig. A.

Fossili in Tortona ; sono nericie , ferruginose e alcune anche allo stato spatoso.

Queste ampullarie sono soggette a parecchie varietà, come si vede tanto presso i nostri esemplari , come anche nelle figure degli autori ; onde dobbiamo essere guardinghi nel fare specie nuove.

5. AMPULLARIA SULCATA nob.

*Testa ovata , transversim sulcata ; spirae anfractus convexis , primo amplissimo.*

Fossile allo stato spatoso nelle vicinanze di Torino.

Lunghezza 6 linee ; i due soli esemplari che abbiamo sono un poco mutilati.

6. AMPULLARIA SPIRATA nob. Tav. 2 fig. 17 (ingrandita).

*Testa subovata , glabra ; apertura ovata , anfractus convexis , ultimo ampliori.*

Fossile in Piemonte.

Esso ha la spira un poco più allungata che le altre specie di questo genere , essendo l'apertura quasi un terzo della lunghezza totale , che arriva appena a 4 linee. Si vede un principio di umbilico , e l'ultimo anfratto è gonfio e doppio degli altri. La figura di Gualt. Tav. 69 F. ma ingrandita , di cui Linneo pag. 3674 , dubita a quale specie del genere *helix* possa appartenere , e quella di Listero Tav. 23 fig. *pullus recentior eductus* , ingrandita ancora , non male convengono colla nostra.

GENERE XXXVIII. *SIGARETUS* (1).1. *SIGARETUS*.

*Helix Haliotoidea* Linn. pag. 3663. V. Brocc. pag. 303.

Abita nel Mediterraneo, e nei mari settentrionali, nell'Oceano Atlantico e Indico (Linn.). Fossile in Piemonte, nel Sanese, nel Bolognese, e nelle vicinanze di Nizza.

Lunghezza 9 linee.

GENERE XXXIX. *NERITA*.1. *NERITA*.

*Testa striata, labio dentato. Listero* Tav. 600 fig. 17?

Lunghezza 13 linee, altezza 9.

Benchè spatosa e zeppa di sabbia serpentinoso indurita, molto apparenti sono i denti suoi sul labbro inferiore. Ma non è possibile di sapere a quale specie di Linneo essa debba riferirsi. La figura di Listero assai le conviene quanto ai denti; ma la nostra è striata o piuttosto soleata da linee parallele incavate in lungo e un poco distanti. Un altro esemplare nel medesimo stato ci offre delle linee molto vicine e più tosto in confusione: un altro poi di minor dimensione si trova striato per traverso.

Non rimane dunque alcun dubbio, che anche in Piemonte si trovino nerite dentate. Queste sono native, secondo Linneo, dei mari molto lontani dal nostro continente,

---

(1) Lam. *ibid.* pag. 64.

e noi ne troviamo sulla nostra collina allo stato spatoso insieme ad altre produzioni marine.

Blancani (1) ne rinvenne una nella ghiara di Serravalle, territorio Bolognese.

#### GENERE XL. *NATICA*.

##### 1. *NATICA*.

*Nerita glaucina* Linn. pag. 3671.

Abita presso le coste della Barbaria e nel Tranquebar, e secondo Olivi anche nell'Adriatico. Fossile molto frequente in Piemonte e in altri luoghi dell'Italia.

Come dice benissimo il signor Brocchi, la nostra valle d'Andona principalmente somministra questo fossile in abbondanza, e di una grandezza che oltrepassa due pollici di diametro: alcuni conservano vestigie dell'antico loro colore.

##### 2. *NATICA*.

*Nerita canrena* Linn. pag. 3669.

Abita nei mari dell'India, dell'Africa e dell'America (Linn.), e secondo Olivi si trova anche nell'Adriatico. Come la precedente, essa si trova fossile in quantità sia in Piemonte, sia in tutta l'Italia.

La sua altezza giunge sino a 21 linee, e ve ne sono che ne hanno appena 3. Nelle une e nelle altre, e massime in

---

(1) Comm. Bonon. Vol. V. parte 2. Tav. 1 fig. 4 pag. 168.

quelle, che oltrepassano 5 linee, si osserva che quella prominenza, che divide in due l'interiore dell'umbilico, viene formata colle medesime strie longitudinali che ricuoprono la conchiglia.

Molte ne abbiamo allo stato spatoso, che vengono colte o sulla collina, o ad una certa profondità del suolo di Torino. Queste appartengono alle due specie precedenti, e in esse si ravvisano i precisi loro caratteri.

3. NATICA.

*Nerita helicina* Brocc. pag. 297.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

GENERE XLI. STOMATIA.

1. STOMATIA.

*Nerita sulcosa*. Brocc. pag. 298.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 10 linee; larghezza 7.

2. STOMATIA.

*Nerita costata* Brocc. pag. 300.

Fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Lunghezza 5 linee.

GENERE XLII. HALIOTIS.

1. HALIOTIS.

Il sig. Brocchi dice non avere mai ritrovato Aliotidi fossili in Italia. Assicura però il celebre naturalista Deluc, il quale molto viaggiò in Piemonte, di possederne una



proveniente da questo paese, benchè l'Allioni non ne citi alcuna. Per quanto io abbia percorso i luoghi i più abbondanti di simili produzioni, nell' Astigiana, nel Monferrat o e altrove, non mi è mai riuscito di rinvenirne. Però fra le varie sostanze appartenenti alla storia naturale del Piemonte, che di tanto in tanto mi vengono portate dai contadini, che percorrono le nostre valli, mi fu consegnata una massa di un calcareo gialliccio grossolano, nella quale insieme a' pettini e altre conchiglie marine vi si trovò un Alotide benissimo formato, vale a dire, il suo modulo. Esso sporge in fuori della detta massa 16 linee in lunghezza, e potrebbe riferirsi alla fig. D Tav. 69 di Gualteri. Essa fu trovata sulla nostra collina in un sito ove non è raro simile calcareo grossolano tutto ravviluppato di conchiglie marine.

#### GENERE XLIII. *DENTALIUM*.

##### 1. *DENTALIUM*.

*Testa subarcuata, transversim subtilissime striata; costis subconvexis 15-17, minoribus sensim evanescentibus; prope apicem sex tantum majoribus residuis, minoribus 1 vel 2 interpositis.*

Fossile comunissimo in Piemonte e in altri luoghi d' Italia. Generalmente la base di questo fossile è striata trasversalmente e là hanno origine le coste e le strie longitudinali. Progrediendo verso la cima, le più picciole scompajono, e ne rimangono alla cima sei circa più grosse, molto apparenti, con una o due più sottili in mezzo. In

alcuni esemplari le coste si trovano o appiattite, o divise alla loro metà, o anche di uguale grossezza sino alla cima: alcuni hanno una curvatura un poco ondeggiante. Varia anche la loro dimensione, e ne abbiamo, che hanno fino a 4 pollici di lunghezza e sei linee e più di diametro alla base; in somma si scorgono parecchie varietà in questo genere di fossili.

In alcuni esemplari si osserva una interruzione nel tubo, ossia si vedono delle rughe trasversali irregolari, dopo le quali il tubo va continuando, ma solitamente in un sito più o meno distante da quello ove fu interrotto. Questo accidente non ha che fare con quelle strie o rughe, che sono dovute all' accrescimento del guscio.

2. DENTALIUM in cui le coste sono dodici all' apice, avendone qualche volta una più sottile in mezzo: se ne hanno di nove con una più sottile in mezzo.

3. DENTALIUM *costis* 20-30 *et ultra majoribus, minoribus vel etiam filiformibus.*

Il numero delle coste fu preso dalla base sino alla metà circa della conchiglia: irregolari assai esse si mostrano nei molti nostri esemplari, tanto in questa specie come nelle altre: ed è appunto da questa irregolarità che credo provenire quel vago e quella incertezza, che si trovano nella descrizione caratteristica di Linneo intorno a questo genere di testacci.

4. DENTALIUM *costis* 15-16, *minori saepe interposita: glabrum.*

Questo più sottile, avendo appena due linee di diametro alla base, e due pollici 3 linee in lunghezza, ha le coste più regolari: è liscio e bianco. Non è poi tanto frequente come gli altri, ed è quello di cui il nucleo è spesso acatino.

5. *DENTALIUM costulis, seu lineis longitudinalibus tenuibus, transversinque striis lente visibilibus ornatum.*

6. Dentali ossia moduli argillosi induriti, altri cambiati in acate.

7. Dentali cambiati in ispato calcareo, della collina di Torino.

8. *DENTALIUM vitreum* Linn.

9. *DENTALIUM costis novem, minoribusque mediis.*

10. *DENTALIUM lineis longitudinalibus profunde impressum.*

Questo *Dentalium* di una ragguardevole dimensione, e immerso nell'argilla indurita, non manifesta altro che linee impresse in lungo; inoltre egli è stato un poco stacciato.

Un simile è stato preso ad una grande profondità sulla collina di Torino, egli è un poco ferruginoso.

11. *DENTALIUM radula* Linn.

preso ad una grande profondità, alla cima della collina di Torino.

GENERE XLIV. *SILIQVARIA*.1. *SILIQVARIA*

*Serpula anguina* Linn. pag. 3743.

Abita nel mare delle Indie; fossile in Piemonte e nel Piacentino.

Notisi che oltre le fenditure trasversali, che caratterizzano in parte questo fossile, esso viene ricoperto alla sua estremità più grossa di solchi alquanto ruvidi ed equidistanti.

GENERE XLV. *VERMICULARIS*.

Lam. pag. 97, aut *Serpula* Lam. pag. 325.

1. *VERMICULARIS*.

*Serpula arenaria* Linn. Aldrov. de Testac. pag. 56.

Abita nel mare delle Indie e dell'Africa occidentale (Linn.)

Fossile in Piemonte, nel Piacentino e in altri luoghi d'Italia. V. Scilla *Vana speculazione* ec. Tav. 12 fig. 2. 3.

*Testa tubulosa, tubis longitudinaliter striato-granulosis; tuberculis hinc inde seriatim exasperata, variis modis contortuplicata.*

Quella sorta di graticola granosa ossia (tricoté) dei Francesi, che la ricuopre, sembra provenire dall'incontro delle strie longitudinali accavallate sopra le trasversali. Si vedono in molti esemplari alcune prominenze in due o tre file parallele, che ricuoprendo i tubi hanno una direzione allungata e nel senso medesimo dei tubi. Questi sono

appiattiti solamente quando sono cresciuti sopra un corpo straniero come sarebbe un sasso, o un pettine, un' arca, o altro testaceo; ma quando è libero e isolato, i vermiculari hanno sempre una forma cilindrica. Varia poi assaissimo il loro modo di aggrupparsi: essi abbondano in molti luoghi del Piemonte ove si trovano affastellati insieme.

Non è meno variabile il loro diametro interno. Ne abbiamo di dieci linee, e il diametro in altri è minore assai.

Nel vuoto interno e aderente a questo fossile tubuloso, si osserva in parecchi esemplari un altro tubo liscio di alcune linee di lungo, il quale termina in una sorta di lente molto convessa e quasi emisferica: sarà forse questo l'opercolo di cui parla il sig. Cuvier. *V. Lam. système des animaux sans vertèbres pag. 325 au genre Serpula.*

## 2. VERMICULARIS.

*Serpula glomerata?* Linn. pag. 3742. Gualt. Tav. 10 T.

Abita nell'Oceano settentrionale, nell'Atlantico, nel Caspio, nel mare di Sicilia (Linn.) e secondo Olivi nell'Adriatico: fossile frequente in Piemonte, nel Sanese e altrove.

Fra i numerosi esemplari, che mi è riuscito di vedere, non ne trovai uno di cui il diametro interno del tubo oltrepassasse una linea e mezza: e benchè l'apertura sia quasi sempre orbicolare, varia assai la forma esteriore. Spesso essa viene ricoperta di due o tre rughe o costole quasi granose e longitudinali. Delle strie molto irregolari o piane, più o meno profonde le solcano per traverso, e quello dà ai tubi delle faccie quasi prismatiche. Questi caratteri

possono molto variare , come varia assaissimo il modo con cui questo fossile si trova o cresciuto sopra altri testacei marini, o aggomitolato e intrecciato fra se stesso.

3. Il medesimo cresciuto sopra altri testacei.

4. VERMICULARIS. Listero Tav. 1053 fig. 6. Scilla *Vana speculazione* ec. Tav. XIII.

*Testa tubulosa , crassiuscula , transversim rugosa.*

Fossile in Piemonte.

Alcuni esemplari soltanto vengono ricoperti di quella sorta di rete ossia rete granosa di cui ho parlato nella *Serpula arenaria*. Questa sarà forse la ragione per cui Linneo , pag. 3743 , ha messo il punto di dubbiezza alla precedente figura citata di Listero. Questo testaceo tubulare, che ha fino a 11 linee di diametro interno , forse appartiene ad individui adulti , e l'altro di minor dimensione a più giovani.

5. VERMICULARIS.

*Testa tubularis , irregulariter transversim substriata.*

Fossile in Piemonte e di due linee di diametro interno al più : altri ne hanno appena  $\frac{1}{4}$ .

Questo non si ripiega , nè si contorce come i precedenti ; ma si trova cresciuto per lungo , e spesso ricoperto della precedente serpula glomerata : la quale benchè avendo la massima propensione ad aggomitolarsi insieme , vi si trova però aderente e cresciuta in lungo come esso : in alcuni esemplari si scorge un principio di costole lungo il tubo.



## 6. VERMICULARIS.

Frammenti di forma tubulare , di cui l' interno è ripieno di piriti unitamente a cristalli di spato calcareo. Il guscio del fossile è anche calcareo, e a questo tubo aderisce esternamente del bitume compatto.

Dono del sig. Professore Filippi della provincia di Acqui ove fu ritrovato.

## 7. VERMICULARIS.

Serpula arenaria stata traforata e danneggiata da altri animali.

## 8. VERMICULARIS.

*Testa tubulosa , laevis , sensim decrescens , albida.*

Fossile in Piemonte.

## GENERE XLVI. SPIRORBIS.

## 1 SPIRORBIS.

*Serpula Spirorbis* Linn. pag. 3740.

Fossile in molti luoghi del Piemonte e d' Italia. Abita nell' Oceano, e secondo Olivi nell' Adriatico.

## GENERE XLVII. NAUTILUS.

1. NAUTILUS *Pompilius* Linn. pag. 3369.

Abita nell' Oceano Indiano e Africano. Fossile in Piemonte.

Benchè non sia a me toccata la sorte di rinvenire in persona questo importante fossile , oggetto di ambiziosa gara ,

dirò così, fra i naturalisti Italiani (vedi Brocchi pag. 456), sono però certo che fu trovato da un contadino nelle vicinanze della nostra valle d'Andona, che lo conservava gelosamente come cosa curiosa e particolare. Mi feci condurre nel sito dall'inventore medesimo, ma il burrone ove era stato trovato, essendosi col tempo ricoperto da strato terroso, fu inutile la mia ricerca. Esso ha di diametro circa 7 pollici: ma dallo stato in cui ora esso si trova, si vede apertamente che è stato molto schiacciato, e ridotto allo spessore di circa 1 pollice  $\frac{1}{2}$ . Il modulo è di una argilla fina indurita; i disseppimenti sono molto apparenti; e il guscio antico spezzato in diverse maniere, e conserva delle vestigie della sua madreperla, che lo ricuopre ancora in molti luoghi. V. Knorr. P. II. A IV. \*\* pag. 53 fig. 1 nella quale si osserva essere la medesima, che nel nostro, la direzione che hanno le separazioni delle camere interne.

2. NAUTILUS. Il medesimo di un pollice di diametro, colle cellule tapezzate di piriti cristallizzati.

Fossile a S. Rafaele nelle vicinanze di Torino, sulla collina.

3. Lo stesso. Modulo di marmo bigio, del diametro di 7 pollici.

Non posso assicurare come dei due precedenti, che questo sia della nostra collina, benchè io abbia ragioni di crederlo.

4. NAUTILUS *Pompilius* Linn. diametro 20 linee.

Il medesimo del n.º 1 di minore dimensione, che mi è

riuscito di trovare in un profondo cavo fatto sulla sommità della nostra collina, e in mezzo a molte produzioni marine mescolate a ciottoli rotolati. Esso è un poco ferruginoso, ed il guscio ricuopre in molti luoghi il modulo che è stato schiacciato.

### GENERE XLVIII. *ORBULITES*.

1. *ORBULITES. Anfractu majori amplissimo caeteros tegente; centro exquisite orbiculari, hinc inde depresso; costis raris testam laevem sinuose percurrentibus; modulus calcareus griseus.*

Fossile a Santa Ricuperata a Nizza (modulo calcareo gialliccio).

Il centro lascia vedere da una parte e dall'altra il principio della spira, ed i primi suoi giri. Il diametro è di 23 linee.

2. *Idem, subdepressus, laevis, calcareus rubescens.*

Diametro 3 pollici  $\frac{1}{2}$ . dello stesso luogo.

3. *Idem, sulcatus: modulus marmoreus.*

Diametro 3 pollici. di S. Ospizio a Nizza.

4. *Idem, modulus marmoreus.*

Diametro 4 pollici. dello stesso luogo.

5. *Idem, fere globularis, sinuose costatus, costis ad dorsum convexum angulatis.* di Santa Ricuperata.

6. 7. *Idem, moduli varii marmorei fere-globulares, costati, costis valde irregularibus.* dello stesso luogo.

8. Idem , *marmoreus depressus*.  
 Diametro 6 pollici  $\frac{1}{4}$ . di Santa recuperata.
9. Idem , *marmoreus dorso rotundato*.  
 Diametro 5 pollici. del medesimo luogo.
10. Massa calcarea gialliccia con clorite , e che contiene  
 quantità di orbuliti di varia dimensione.  
 dei contorni di Nizza.

### GENERE XLIX. *AMMONITES*.

1. *AMMONITES costatus* , *dorso rotundato*.  
 Modulo marmoreo bigio del diametro di 3 pollici 9 linee.  
 di Lemenco vicino a Ciamberi.
2. Idem , marmo nero del luogo detto *Lathuille* vicino  
 al piccolo San Bernardo.
3. Idem , marmo nericcio. Frequente nella montagna detta  
*Ercluse* , nella mia patria. S. Pietro d'Albigni.
4. Idem , *dorso tuberculato*.  
 di Castiglione provincia di Nizza.
5. Idem , frammenti ragguardevoli per la loro ampiezza  
 di Ammoniti solcati , a dorso rotundato. La spira nella sua  
 lunghezza ha oltre 4 pollici. dei contorni di Nizza.
6. Idem , marmo bigio con Ammoniti.  
 di Rocca-ferone alcune miglia da Nizza
7. Idem. di Cigale vicino a Nizza.
8. Idem , *costatus* , *dorso media spina*.  
 di Malansena al piede del colle Vial per andare a Nizza.

9. Idem, *costatus*, *costis dorso rotundato crebrioribus*.  
della Riva dello Sterone a Nizza.
10. Idem, *costatus*, *conchae adhaereus*. Marmo bigio.  
preso sul lido del Paglione a Nizza.
11. Idem, *costatus*, *costis tuberculatis*, *tuberculis 6*  
*seriatim dispositis*, *dorso rotundato*.  
della provincia di Nizza.
12. Idem, *dorso spinoso*, *tuberculis 4*.  
dello stesso luogo.

Questi due precedenti potrebbero appartenere alle orbulite.

#### GENERE L. *NUMULITES*.

1. *NUMULITES*, della dimensione di una lenticchia in una  
massa calcarea.  
dal luogo presso Seyssel ove il Rodano s'ingolfia nella terra.
2. Idem, in un aggregato calcareo bigio.  
della Briga vicino a Nizza.
3. Idem, in picciole lenticchie sopra un calcareo gialliccio.  
di Nizza.

#### GENERE LI. *ORTHOCERA*.

1. *ORTHOCERA*, *raphanoïdes*, *cyliudricus*, *striis per*  
*longuni extantibus*, *articulis torosis*. (*Nautilus raphanus*  
Linn.).

Lunghezza 6 - 7 linee. Ne abbiamo di cui le articolazioni sono appena sensibili.

2. ORTHOCERA, *glabra, incurvata sensim attenuata; articulis in quibusdam exemplaribus subglobosis.*

Lunghezza 6 - 7 linee.

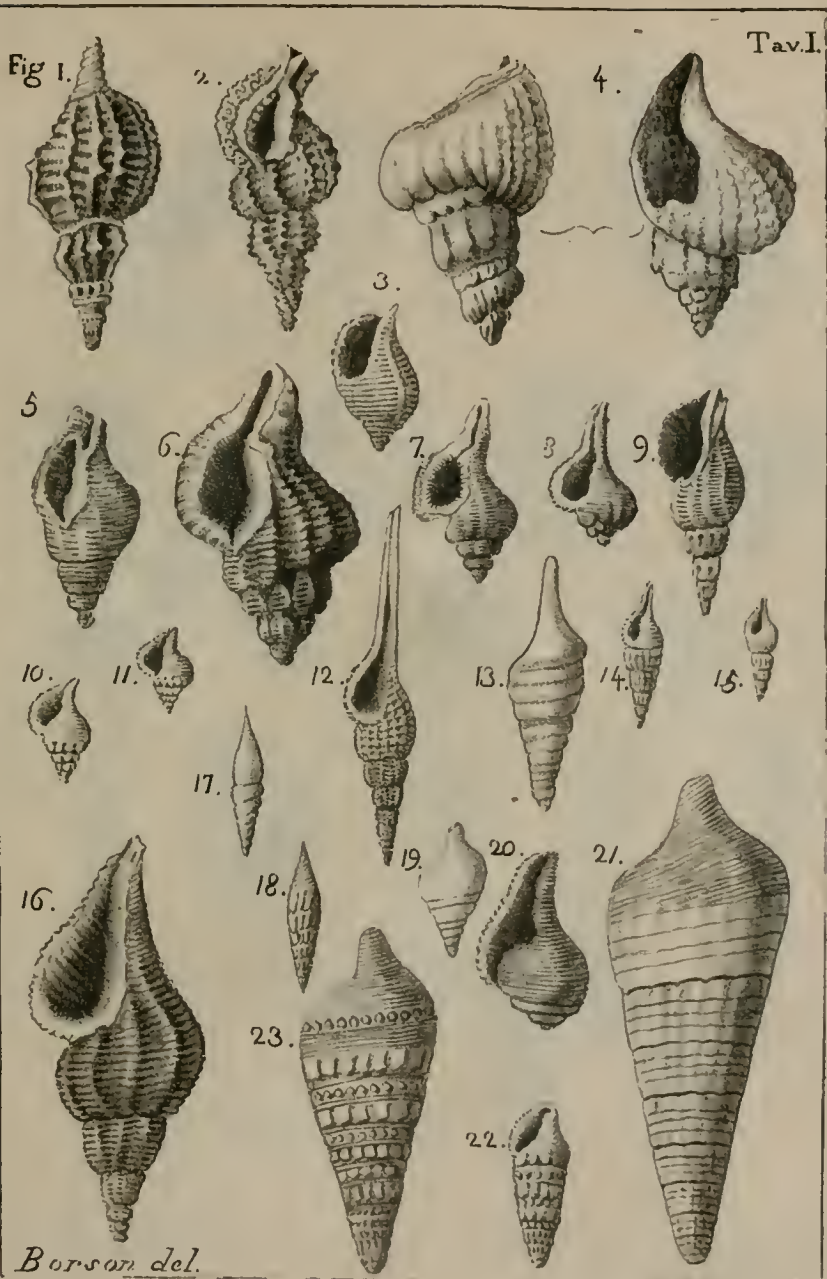
#### GENERE LII. BELEMNITES.

1. BELEMNITES, Belemnite un poco schiacciate con un solco longitudinale, in una massa di argilla verdiccia, con clorite: altre sono sciolte e prive di quel piccolo solco.

di Lascarena, e di Santa Ricuperata a Nizza.

2. Idem, coniche nella medesima massa e dello stesso luogo.











## SAGGIO

INTORNO AD ALCUNI FENOMENI ELETTRO - MAGNETICI  
E CHIMICI

DEL DOTTOR VITTORIO MICHELOTTI

PROFESSORE DI CHIMICA MEDICA, E FARMACEUTICA

*Approvato nell'adunanza delli 3 giugno 1821.*

## PARTE PRIMA.

*Fenomeni elettro-magnetici.*

**I** Fisici paragonando gli effetti della pila di Volta con quelli della macchina ordinaria, riconobbero potentissimi quelli della corrente della pila, e quantunque grandi quelli dell'*accumulamento* del fluido nella macchina, debolissimi riescono quelli della sua corrente. Il sig. Wollaston particolarmente trovò il modo di far osservare gli effetti della corrente elettrica della macchina comune: tuttavia al mio credere, nessuno avanti il sig. Ampere (1) aveva ben stabiliti

---

(1) Sur l'action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants. *Annal. de chimie et de physique* tom. XV. pag. 59 et 170.

i caratteri, che distinguono la *corrente elettrica* dal semplice *accumulamento o tensione* del fluido.

In fatti egli dimostrò che la corrente vitrea, la quale nella pila va dal rame al zinco, e nel filo conduttore dal polo zinco al polo rame, non è indicata dagli elettroscopi, che tuttavia segnano ogni accumulamento d'elettricità; ma queste correnti agiscono sopra l'ago calamitato deviandolo dalla sua naturale direzione, e ciascuna in senso opposto.

Nelle attrazioni o ripulsioni elettriche ordinarie, i fluidi opposti s'attirano, e i corpi nello stesso modo elettrizzati si rispingono, le loro attrazioni o ripulsioni durano sino a che siasi stabilito l'equilibrio fra le elettricità opposte. Queste attrazioni o ripulsioni non producono chimiche scomposizioni, tranne quelle che possono succedere forse per cagione meccanica o di temperatura.

All'opposto le correnti elettriche di diverso nome si respingono, e s'attirano le omogenee. Le loro ripulsioni od attrazioni durano quanto le correnti che le producono; finalmente attivissime sono nel produrre i fenomeni della chimica scomposizione.

Considerando ora la pila di Volta, e la macchina comune sotto questi due rapporti, abbiamo corrente continua nella pila, e forse può crescere in modo indefinito col crescere della conducibilità del conduttore dei due poli. Abbiamo *tensione* ne' poli opposti della pila interrompendone la comunicazione; ma questa sarà picciola cosa in paragone della corrente che gli stessi elementi della pila movono. All'opposto



nella macchina comune, come suol adoperarsi, grande è l'accumulamento nel conduttore isolato, in paragone della corrente che essa mette in moto. Isolando poi la macchina, e mettendo le due parti opposte in comunicazione con un filo conduttore, la quantità del fluido mossa in un dato tempo è sempre la stessa; qualora poi s'interrompa la comunicazione lo stato di tensione nelle parti opposte è tuttavia grande (1).

Fra i fenomeni della corrente della pila, i di cui poli comunichino tra di loro (nella quale allora non avvi tensione ossia accumulamento) e quelli della scarica elettrica, e la corrente di un conduttore di una macchina non isolata (benchè anche qui siavi corrente) debbono succedere differenze assai grandi.

Il conoscer queste ed il ben distinguerle è importantissimo: ma da quanto appare il sig. Oersted non potè ottenere colla macchina comune gli effetti proprj della vera corrente elettrica (2).

---

(1) NB. Nell'epilogare quanto parmi essenziale per istabilire i caratteri della *corrente elettrica*, non ho in mira d' esporre tutto ciò che questa presenta di rimarchevole: veggasi lo stesso scritto del sig. Ampère loc. cit.

(2) Bibliothèque universelle tom. 15 pag. 137. Les effets électro-magnétiques ne paroissent pas dépendre de l'intensité de l'électricité, mais seulement de sa quantité. La déchargé d'une forte batterie électrique, transmise par un fil métallique, ne donne aucun mouvement à l'aiguille aimantée. Une suite non interrompue d'étincelles électriques agit sur l'aiguille par les attractions et repulsions électriques ordinaires; mais autant qu'on peut s'en assurer, les étincelles ne produisent pas d'effet electro-magnétique.

Il sig. Arago, colla scarica della bottiglia di Leyda, magnetizzò agli contenuti in filo di rame piegato in elice, e ciò nello stesso modo che succede, facendo comunicare l'elice coi poli opposti della pila (1).

Il sig. Professore Configliachi assicura, che la scoperta di Oersted riesce egualmente cogli apparati elettrici ordinarij, tuttavolta che sieno convenientemente disposti. *Bibl. Universelle tom. 16 pag. 72.*

Io però non conoscendo, che nessuno di questi od altri autori abbiano dati maggiori schiarimenti intorno a ciò che succede colla macchina ordinaria, credo di poter esporre in breve ciò che ebbi occasione di sperimentare.

## ARTICOLO I.º

### *Della corrente elettrica.*

Leggesi nel giornale di fisica chimica ed istoria naturale di Parigi (2) la seguente nota del sig. Lefèvre Gineau. » J'ai

(1) Expériences relatives à l'aimantation du fer, et de l'acier par l'action du courant électrique. *Annal. de chimie et de physique tom. XI pag. 93*, e *journal de physique, de chimie, d'histoire naturelle tom. 91 pag. 164.* Note de M. Hachette. En faisant passer une décharge de bouteille de Leyde, à travers un fil de cuivre plié de la même manière, suivant deux hélices consécutives symétriques, M. Arago a encore observé que les aiguilles d'acier placées dans ces hélices, s'aimantoient par le fluide électrique des machines ordinaires, comme par l'appareil voltaïque.

(2) Tom. 91 pag. 233.

» l'honneur de vous adresser la description d'un phéno-  
» mène que j'ai observé pour la première fois, il y a plus  
» de douze ans, que cependant je ne crois pas connu, et  
» qui me paroît avoir des rapports avec les expériences dont  
» s'occupent aujourd'hui les physiciens. Voici le fait: je  
» place un électromètre à pailles, armé d'une pointe, sous  
» le conducteur d'une machine électrique à plateau de ver-  
» re; je tourne ce plateau d'un 8° ou 6° de tour environ,  
» enfin assez pour que les pailles arrivent à-peu-près à  
» leur maximum d'écartement, sans aller décharger leur  
» fluide sur les parois de l'électromètre; les choses en cet  
» état, je tourne le plateau en sens contraire, de manière  
» à le ramener à sa première position; à l'instant même  
» l'écartement des pailles cesse, et chacune reprend sa  
» position verticale ». L'osservazione di questo celebre fi-  
sico è verissima, e come egli dice nou spiegata; tuttavia  
non pare che possa essere nuova; il riconoscere poi se que-  
sto fenomeno si debba a corrente elettrica, come ne du-  
bita l'Autore, mi parve cosa degna d'attenzione.

Collocai sotto, ma parallelamente all'asse del conduttore  
di una macchina a disco di vetro, di 23 pollici di dia-  
metro, un lungo filo di rame. Questo comunicava imme-  
diatamente col conduttore, ed i suoi estremi erano prolun-  
gati a distanza tale dalla macchina, che collocando ivi gli  
elettrometri, e togliendovi il filo, benchè si caricasse il  
conduttore con varj giri del disco, tuttavia il conduttore  
per niente influiva sugli elettrometri posti a tale distanza.

Tal disposizione pareva atta a riconoscere se alle volte il disco spingesse corrente, come si sarebbe potuto credere dallo sperimento dell' Autore. Gli elettrometri a pagliuole essendo adunque posti vicino alle due estremità del filo di rame conduttore, succede, che girando di  $1/5$  circa il disco, contemporaneamente divergono, e contemporaneamente si ravvicinano rigirandolo in senso contrario; tali stati degli elettrometri non sono permanenti, ma anche dilatati o ravvicinati che si sieno, passano da uno stato all'altro, sino a che siasi equilibrata la loro elettricità con quella del conduttore.

Che questo fenomeno dipenda da semplice attrazione elettrica, sarà anche facile il convincersene, dividendo con segni il disco in quarti: poichè allora si vedrà, che la parte del vetro che passa fra i cuscini, e che è l'elettrizzata, è quella che si bilancia col conduttore, e cogli elettrometri, e che rivolgendo il disco per presentare ai cuscini la parte non strofinata, allora gli elettrometri ed il conduttore si equilibrano col disco.

Sarà forse inutile l'accennare che questo stesso fenomeno, succede anche facendo comunicare il filo di rame ai cuscini, in vece del conduttore.

Esplorai in altro modo se l'elettricità che condur si può dal conduttore, o dai cuscini mediante un filo metallico, fosse sensibile all'ago considerato come magnetico.

Isolai un filo di rame nella direzione del meridiano magnetico; lateralmente ma parallelamente al medesimo sospesi

un ago calamitato: altre volte lo sospesi sopra o sotto al medesimo. Facendo comunicare il filo di rame per esempio dal canto nord col conduttore, il polo dell'ago che era diretto al nord fu costantemente attirato: il contrario succede, se l'elettricità, che chiamar possiamo, l'*afflusso del fluido*, viene dal sud.

Isolando completamente tutto l'apparato, e mettendo il filo di rame in comunicazione da una parte col conduttore, e dall'altra con i cuscini, è inutile il dire che avvicinandovi un elettrometro, egli non indica elettricità, mentre il disco gira; ma bensì ed all'istante, se si interrompe l'una o l'altra delle sue comunicazioni. Nel caso che il filo perfettamente comunichi con ambe le opposte parti della macchina, trascorre per il filo una vera corrente elettrica; tuttavia non mi riuscì di vedere che deviasse sensibilmente l'ago calamitato; pare però che la cosa dovrebbe succedere, o valendosi di macchina più potente o di più propria disposizione (1).

---

(1) In seguito a quanto scrissi al sig. Dottore Giuseppe Mojon Professore di clinica a Genova, ebbe anch'egli la compiacenza di comunicarmi le sue esperienze. » Ho ripetuto anch'io alcune esperienze con una macchina elettrica » a disco, di un metro di diametro, ed ho osservato che la sua azione sull'ago » è quasi insensibile, ed è inferiore a quella di una semplice pila di 25 cop- » pie di 3 pollici.

» La macchina elettrica a cilindro, perfettamente isolata, acciò non comuni- » chi col suolo, e facendo comunicare i due cilindri metallici dal lato op- » posto del manubrio, in modo che l'elettricità, che si accumula sul cilindro » armato di punte, possa ritornare sul cilindro che porta il cuscino, ed in



Intanto l'ago calamitato, od anche uno di ottone, sospeso in vicinanza del filo conduttore, indicherà *l'afflusso elettrico* nel modo sopra accennato, ogni qual volta s'interrompa la libera comunicazione del filo, o col conduttore, o coi cuscini: in tutti questi casi l'ago calamitato non avrà altro vantaggio sopra quello di ottone, che di mantenersi spontaneamente parallelo al filo conduttore sino al momento dell'azione.

Con una pila di cento coppie rotonde di 2 pollici e  $\frac{1}{2}$  di diametro non potei vedere, che il filo conduttore producesse deviazione dall'ago calamitato. Col semplicissimo apparato di Seebeck, e del quale si servirono i signori Buch, ed il Dottore Neef (1), non solo potei osservare sì fatta deviazione, ma, come dicono i compilatori di questo giornale, la cosa succede in modo sorprendente.

Il crogiuolo di platino di cui mi son servito è similmente di pollici 2  $\frac{1}{2}$  di altezza e di due di diametro. La lamina di zinco, sopra la quale posava, e che si ripiegava nel medesimo, è similmente poco meno di due pollici di lar-

---

» tal guisa stabilire una specie di corrente elettrica, produce gli effetti più  
 » sensibili di quelli ottenuti colla macchina a disco, ma però inferiori ai ri-  
 » sultati ottenuti dalla corrente elettrica eccitata dalla pila voltiana. Ho inoltre  
 » osservato, che collocando due fili metallici alle due armature di una forte  
 » batteria elettrica, e fra questi due fili, terminati in punta sottile, un ago  
 » magnetico, è più sensibile la declinazione di questo. Si può anche magnetiz-  
 » zare un ago che non sia calamitato, tenendolo a poca distanza fra l'estre-  
 » mità dei due fili, in modo che non succeda la scarica istantanea della bat-  
 » teria, ma bensì lenta e continuata ».

(1) Bibl. universelle tom. 16 pag. 119.



ghezza. Collocai l'apparato sopra un vetro, ed in modo, che trasforando perpendicolarmente la lastra superiore ed inferiore, si potessero sospendere simultaneamente due aghi, uno alla superficie esterna della lamina superiore, e l'altro all'esterna dell'inferiore, sopra della quale posava il crogiuolo; ovvero si collocavano gli aghi internamente od alternativamente.

Qualora il liquido sia sufficientemente acido, l'apparato sia nella direzione del meridiano magnetico, ed il crogiuolo al sud, se l'ago magnetizzato sia sospeso superiormente alla lastra che si piega poi nel crogiuolo, la deviazione dell'ago è di 90 gradi all'est. Trasforando, come dissi, la lastra e facendovi passare immediatamente al disotto l'ago sospeso, la deviazione è all'ouest. Nella lastra inferiore, sopra della quale posa il crogiuolo, la deviazione dell'ago è all'est, quando è sospeso alla faccia esterna cioè inferiore, ed è all'ouest quando è sospeso sopra la faccia interna: in una parola, la stessa lastra sia inferiore, che piegata superiormente dalla faccia esterna spinge l'ago all'est, e dalla faccia interna all'ouest. Egli è altresì vero che collocando l'apparato in modo che formi angolo retto col meridiano magnetico, ed il crogiuolo di platino sia al ponente, la punta dell'ago (nord) indicante il sud si rivolge quasi di slancio, non solo di 90 gradi all'est, ma si fissa anche al nord, cioè ne descrive 180.

Era vago inoltre di osservare una delle più importanti scoperte fatte dal sig. Ampère, cioè quella che vien annunziata in questi termini: » *deux courans électriques s'attirent*

» quand ils se meuvent parallèlement dans le même sens;  
» ils se repoussent quand ils se meuvent parallèlement en  
» sens contraire ».

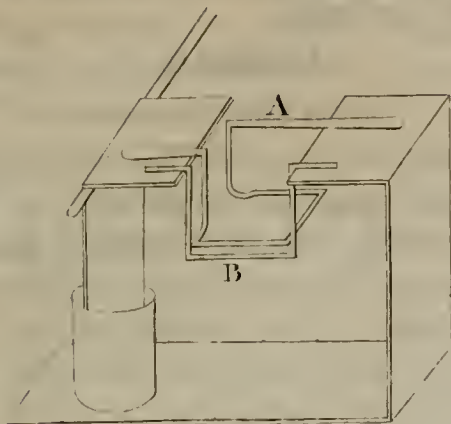
Non avendo io gli ingegnosi apparati del sig. Ampère, immaginai, che disponendo convenientemente l'apparato del sig. Seebeck, questo curioso fenomeno si sarebbe potuto osservare, ed in fatti la cosa pienamente succedette.

Tagliai trasversalmente, e per metà la parte superiore della lastra di zinco, in modo che restasse un intervallo di poco più di un pollice. La parte della lastra che s'immerge nel crogiuolo, si sostenne con un cilindro di vetro orizzontale, unito con cera lacca, al dissotto della piegatura della lastra.

Così disposte le cose è chiaro, che in questo semplice apparato sono i due poli separati; cioè il resinoso nel margine della lastra di zinco che s'immerge nel crogiuolo posto al sud; il vitreo nel margine della lastra di zinco che ripiegandosi passa sotto al crogiuolo: quindi adattando ai due margini conduttori per esempio di argento ec. che si immergano nella soluzione di deutosolfato di rame, si deporrà il rame dal canto del crogiuolo, ed il solfato di argento nella parte opposta.

Sopra i due margini della lastra ben puliti posi un forbito filo di rame piegato in basso, in modo che presentasse parallelamente la corrente vitrea nei due sensi opposti, cioè dal nord al sud, e viceversa, ( V. la fig. A ) ben vicino al filo nord-sud; sospesi un altro filo mobilissimo similmente di rame e piegato come nella figura (B): da che l'apparato

fu posto in azione, il filo mobile fu attirato dal filo rame; collocando poi il filo mobile in contatto col filo di rame sud-nord esso ne fu scacciato (1).



Non potrei passare sotto silenzio quanto giusta sia l'osservazione dei signori Gay-Lussac, Thenard, ed Ampère (2) nel distinguere gli effetti prodotti dalla tensione da quelli della corrente. Nel poc'anzi accennato apparato siam lontani

---

(1) Alcuni mesi dopo, da che io mi era servito di cotal disposizione di cose compari nella Bib. universale tom. 16 pag. 201 un ingegnossissimo e semplice apparato del sig. Professore de la Rive, col quale si può osservare l'azione della magnete sopra la *corrente elettrica*: quest'apparato è una modificazione degli aghi galleggianti di Neef, ma da quanto vidi, presepta risultati molto più soddisfacenti.

(2) Annal. de chimie tom. XV pag. 65 etc.

dall'averne ne' due margini opposti, e separati una tensione paragonabile a quella di una mediocrissima pila; ed in una eccellente pila, quella di una macchina ordinaria; ma relativamente alla corrente, questa cresce dalla macchina alla pila, e dalla pila all'apparato di Seebeck in ragione della eccellenza dei conduttori.

## ARTICOLO 2.<sup>o</sup>

### *Della magnetizzazione.*

Fra gli effetti che produr può la corrente elettrica, quello di magnetizzare, pare uno de' più facili ad ottenersi. Da molto tempo Wilke, Franklin, Daliband, Beccaria ec. avevano riconosciuto, che colla scarica elettrica si poteva magnetizzare un ago ec., ed osservato avevano che la cosa riusciva meglio, l'ago essendo collocato nella direzione del meridiano magnetico (1).

Il nostro collega Giuseppe Mojon Professore di Chimica nell' Università di Genova pare essere stato il primo, che abbia scoperto la proprietà magnetizzante della corrente galvanica (2): ed il sig. Romaneti quella di far deviare l'ago magnetico (3). La proprietà del filo conduttore d'attrarre il

(1) *Singer élémens d'électricité et du galvanisme traduit par M. Thillage* pag. 226. L'effet produit, dépend principalement de la situation des aiguilles, au moment où elles sont frappées; et fort-peu de la manière suivant laquelle la charge les traverse. Le magnetisme communiqué est plus fort, quand l'aiguille qui reçoit le choc, est dirigée du nord au sud; et il est moindre, quand elle est tournée de l'est à l'ouest.

(2) *Bib. universelle* tom. 16 pag. 73. Nota del traduttore.

(3) *Ibidem*.

ferro come la magnete, parmi interamente dovuta al sig. Arago, come la felice idea dedotta da principj teorici di comunicare a volontà i poli ad un ago cc. valendosi di un'elice per condurre intorno all'ago il fluido, parmi appartenere al sig. Ampère, il quale la realizzò col sig. Arago (1).

In fatti il sig. Oersted parve soltanto supporre che il fluido, aggirandosi, circoli intorno alla magnete (2).

All'epoca che ripetei, ed instituii proprj sperimenti sopra la magnetizzazione, mediante l'elettricità ordinaria, erano pubblicati i soli sperimenti del sig. Arago, non già quelli, che il sig. Professore Configliachi dice di aver fatti, ma che non pubblicò, (ivi *Bib. universelle loco cit.*) nemmeno quelli che pubblicarono in poi i signori Gazzeri, Ridolfi, ed Antinori (3): quindi molti degli sperimenti, che allora eseguii, essendo già pubblicati da questi ultimi Autori mi restringerò ad esporne i principali risultati (4).

(1) Annal. de Chimie et de Phys. tom. XV pag. 94.

(2) Bib. universelle tom. XIV pag. 279. On peut aussi conclure des observations que ce conflit agit en tournoyant etc.; pag. 280. Tous les effets exposés tout-à-l'heure relativement au pôle nord, de l'aiguille s'expliqueront aisément en supposant que la force, ou la matière négativement électrique, parcourt une spirale fléchie de gauche à droite; qu'elle pousse le pôle nord. et qu'elle n'agit pas sur le pôle sud etc. etc.

(3) Bib. universelle tom. 16 pag. 101. Expériences électro-magnétiques faites à Florence par le Professeur Gazzeri, le Marquis Ridolfi, et le Chev. Antinori.

(4) Non avendo per iscopo l'istoria delle cose fatte sopra quest'argomento, passerò sotto silenzio varj lavori, d'altronde importanti, che successivamente si pubblicheranno, specialmente negli accennati giornali, tanto più che di alcuni, ne sarà questione nel seguito.

1.° Collocando in elici aghi d'acciajo, e scaricando ad uno degli estremi dell'elice una bottiglia di Leyda, gli aghi sono calamitati colla stessa legge, che vengon magnetizzati dalla corrente galvanica, considerando il bottone della bottiglia come il polo zinco.

In fatti un ago posto in elice piegata a destra acquista il polo australe ( quello che si dirige al nord ) dalla parte che l'elice comunica col polo negativo rame, mentre che questo stesso polo si formerà dalla parte positiva ossia zinco, servendosi di elice piegata a sinistra (1).

Valendosi adunque di una bottiglia di Leyda, o facendo venire una corrente di scintille, o facendo comunicare direttamente col condensatore un'elice piegata a destra, il polo nord sarà sempre ( quello che si dirige al sud ) dal canto che viene l'elettricità vitrea, ed all'opposto succederà valendosi d'elice piegata a sinistra; quindi pure in doppia elice, delle quali una sia fatta in senso inverso dell'altra, si avranno con una sola scarica due aghi inversamente magnetizzati, cioè se l'estremo del primo, che corrisponde a quello del secondo diventerà polo sud, l'altro diventerà polo nord.

2.° Sia che l'elice sia nel senso del meridiano magnetico, sia essa variamente inclinata, perpendicolare, o trasversale a tal direzione, da quanto potci osservare, la magnetizzazione, ed il grado della medesima succede sempre nello stesso modo e nella stessa intensità.

---

(1) Annal. de Chimie, et de Phys. *ibid.* pag. 97.



3.° Qualora poi si tratti di scarica elettrica, giova l'avvertire, che gli aghi posti in doppia elice, collocata per esempio nella direzione del meridiano magnetico, acquisteranno in modo inverso i loro poli, secondo che si darà la scarica al nord, od al sud: il che deve succedere così, poichè in qualunque direzione si consideri un elice, le sue evoluzioni sono sempre nello stesso senso. D'altra parte questo fatto dimostra colla maggior chiarezza, che la direzione dei poli è determinata dalla direzione della corrente elettrica intorno all'ago.

4.° Introdussi per fianco un elice a destra in altra piegata a sinistra, e nello spazio compreso fra entrambe vi collocai un ago. Anche mediante forte scarica egli fu appena sensibilmente magnetizzato; come infatti, teoricamente ragionando succeder doveva.

5.° Facendo comunicare le parti opposte di una macchina isolata per mezzo d'un filo di platino, esso non attirava sensibilmente la limatura di ferro; sostituendovi una doppia elice contenente due aghi d'acciajo, questi furono magnetizzati. Colla pila della quale parlai, mentre era in forte azione, mi riuscì benissimo di vedere l'attrazione della limatura di ferro dal filo conduttore; essa pure magnetizzò gli aghi compresi nelle elici.

Coll'apparato di Seebeck modificato come dissi, si può stabilire la comunicazione con un filo o di rame o di platino, ovvero con elici contenenti aghi; allora si potrà osservare l'attrazione della finissima limatura di ferro, e la magnetizzazione degli aghi, la quale è assai forte in tre minuti.

Terminerò quest' articolo facendo un' osservazione , la quale parmi di qualche importanza.

La corrente elettrica della macchina isolata non comunicò al filo la facoltà di attirare la limatura di ferro, nemmeno quella di deviare l'ago calamitato (1), produsse bensì debole magnetizzazione. Il filo conduttore della pila ordinaria attirò sensibilmente il ferro, non deviò l'ago magnetico, calamitò gli aghi. L'apparato di Seebeck disposto in modo conveniente produce alcuni effetti di una assai forte pila, ma la magnetizzazione degli aghi, forte relativamente a quella dei sovraccennati mezzi, è debole in paragone di quella, che produce la scarica di una mediocre bottiglia di Leyda, la quale scarica però non produsse gli altri fenomeni della corrente elettrica.

Sarei adunque inclinato a credere che la chimica scomposizione dei corpi succeda in ragione dell' intensità (2); che la deviazione dell'ago calamitato, le attrazioni delle correnti omogenee, e del ferro succedano in ragione della rapidità delle correnti elettriche (3); mentrechè l'intensità ossia saturazione magnetica dell'ago corrisponda piuttosto alla quantità di fluido che istantaneamente li vien trasmesso.

---

(1) È però sempre costante, che con più potente disposizione succeder deve.

(2) La quale può aumentare in ragione del numero degli elementi.

(3) La quale dovrebbe essere in ragione della maggior facoltà conduttrice dell'apparato, tuttavolta che l'intensità non superi la mediocre conducibilità.

## MEMORIA

## SULLA COMPOSIZIONE CHIMICA

## DI DIVERSE SPECIE DI BORACE BRUTTO DEL LEVANTE

DI GIOVANNI BATTISTA CANOBBIO.

*Approvata nell' Adunanza delli 24 giugno 1821.*

**I**nteso nell' anno scorso a fare alcune esperienze sull' *acido borico* , in tempo in cui ripetea a varj miei alunni la lezione sul *boro* , mi venne in pensiero d' intraprendere intorno alcune delle diverse specie di borace brutto del levante, conosciute da gran tempo in commercio , alcuni saggj analitici dai quali ebbi risultati talmente nuovi , e dirò anche così opposti ai fin qui conosciuti , che ho giudicato non disutile di farli di pubblica ragione.

Che la vera composizione chimica del borace brutto di levante non sia stata fin' ora adeguatamente conosciuta è facile il chiarirsene, osservando, che di quanti chimici s' occuparono a determinarla , non avvene due soli , che siano d' accordo nell' ammettervi tutti gli stessi principj. *Cadet* , che credo essere stato il primo ad intraprendere a tale oggetto delle esperienze sul borace brutto , dice averne ottenuto , » del borace propriamente detto , ed una terra

» biancastra, che riguardò come vero borace, la di cui  
» aggregazione fosse stata disunita dall'acqua, e la cui ri-  
» generazione poteva per mezzo della medesima operarsi  
» di nuovo con alquanto di rame, che credette parte  
» costituente del borace stesso. » *Beaumé*, che contemporaneamente a *Cadet* s'occupava d'un tale esame annise anch' egli la detta terra bianca, ma dice averla riconosciuta composta » di molto sale sedativo, (così chiamavasi in allora » l'acido borico) e d'una terra vetrificabile argillosa della » stessa natura di quella, che serve all'allume, poichè » coll'acido vitriolico ottenne dalla medesima del puro » allume. Quanto al rame lo credette accidentale, proveniente forse dai vasi di rame ne quali si procede alla » preparazione del borace stesso. » *Valmont-de-Baumare* vi distinse due sostanze diverse, cioè » il borace propriamente detto, ed il Tinkal, che altro non è secondo lui, » che una materia grossa, salina, terrosa, e vetrificabile. » *Fauquelin* non so se siasi con essi accordato nell'ammettere nel borace brutto l'anzidette sostanze, so benissimo che disse » essere i cristalli di detto sale involuppati in un sapone a » base di soda. » Il mio Professore *G. Mojon*, da alcune esperienze fatte sul Tinkal potè conchiudere, » essere il medesimo composto di sottoborato di soda, e di una sostanza verdognola analoga al boro, od alla base dell'acido » borico. » *Thenard* per ultimo nel suo corso di chimica 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> edizione pare non vi ammetta, che delle materie grasse.

Nè tali discrepanze sono di così poco momento da poterle trapassare in silenzio, giacchè non solo provano quello che dissi poc' anzi, cioè che non si sanno ancora i componimenti del borace brutto di levante, ma che è tutt'ora involto nelle tenebre il segreto di cui si giovano al di d'oggi gli Olandesi sulla sua raffinazione. Diffatti come concedere, per esempio, che la raffinazione di questo sale brutto non abbia altro oggetto, che quello di togliere al detto sale le materie grasse, che contiene, come alcuni asserirono? Se ciò fosse, lungi i raffinatori dal potere vendere il borace raffinato a minor prezzo del brutto dovrebbero aumentarne il valore, giacchè, oltre le spese a loro carico per eseguire questa purificazione avrebbero una notevole diminuzione nel brutto del medesimo.

In vero l'altro supposto, che siavi, vale a dire, col borace brutto del borace in istato di disgregazione, oppure dell'acido borico libero, sarebbe più adattato del precedente a rendere ragione del ribasso che si fa nel prezzo del borace brutto, in confronto col raffinato, giacchè in amendue i casi vi sarebbe una causa notevole d'aumento di peso nel prodotto raffinato: nel primo per la non indifferente quantità d'acqua necessaria alla nuova aggregazione, o cristallizzazione del sale, nel secondo per la quantità di soda, e per la forte proporzione d'acqua che sarebbe necessaria alla cristallizzazione del sottoborato di soda: e certa cosa è, che per tal modo il fabbricante potrebbe fare una non mediocre diminuzione sul prezzo,



con cui pagò egli stesso il borace brutto. Più di tutto però renderebbe ampiamente ragione della detta diminuzione il supposto, che nel borace brutto v' esista del boro, od una sostanza al medesimo analoga a poter produrre dell' acido borico; giacchè, se nel caso precedente non si ha che a saturare l' acido nel borace brutto contenuto, in questo dovrebbero prima formar l' acido stesso, quindi aggiungervisi la soda necessaria alla sua saturazione; due cause, che unitamente all' acqua di cristallizzazione danno un aumento nel prodotto, che non si può avere in tutti gli altri sopra esposti casi.

Quanto a me, lo dirò francamente, io avviso che nulla sia da concedersi di quanto si disse essersi trovato composto il borace brutto, e di quanto si suppose intorno al secreto della sua raffinazione, per la spiegazione del quale s' immaginarono a mio parere, ma non si trovarono i prodotti menzionati nelle dette due ultime ipotesi. Sarebbe forse per avere lavorato su d' una specie di borace brutto che altri non avranno sperimentata? Lo voglio credere, poichè nessuno tra i chimici analizzatori la determinò: tutti dicono avere lavorato sul borace brutto, ma non è indicata quale specie del medesimo abbiano scelta, ed è d' altronde probabile, e possibile, come si può vedere leggendo gli autori, che trattarono dell' estrazione di questo sale, che il borace brutto estratto, per esempio dalle acque grasse, e saponacee di que' luoghi di cui parlano Tourner, Guglielmo Blanc, ed il padre da Rovato sia diverso da quello,



che dice Ermanno prepararsi come una terra nitrosa. Comunque sia la cosa, affinchè ognuno possa essere in istato di accertare quanto dirò, comincierò quì a determinare, per quanto si può, la specie di borace brutto, di cui mi sono servito nelle mie esperienze. Io la credo proveniente dalla terra nitrosa, di cui parlò Ermanno, e ciò in quanto che porta il nome di borace di Bengala, ed a Bengala distatti portasi il prodotto di tali manifatture dei distretti di Patna, del Decan, di Visapour, ec., le uniche, per quello fin quì si sappia, che si lavorino su detta terra.

### PARTE I.<sup>a</sup>

#### *Analisi chimica del borace di Bengala.*

Questo è in grossi cristalli, d'una figura, che si avvicina più alla globulare, che a qualunque altra, d'un colore verdognolo pallido, di peso maggiore di quello dell'acqua distillata, e non molto duro, potendo essere coll'unghia rigato.

Presi cento scrupoli del medesimo, li polverizzai in un mortajo di porfido, quindi lavati con grandissima quantità d'acqua bollente versata sul detto sale a riprese, che separai tosto colla depurazione della sostanza rimasa indisciolta in fondo del mortajo sotto forma d'una polvere ruvida, e che aveva, massime ancor bagnata, un leggiero colore verdognolo, mi diedero un liquore assai opaco, e che col

semplice riposo divenne limpido, lasciando deporre una sottilissima polvere bianca, insolubile in qualunque proporzione d'acqua bollente. Raccolte su filtri amendue queste sostanze insolubili trovai, che la bianca bene asciutta era in peso grani 80, mentre l'altra ne pesava 204, ciò che darebbe un buon ottavo di materia insolubile sul totale del sale brutto impiegato: non si può dire però, che l'ultima fosse assolutamente separata da tutta la materia bianca anzi detta, che anzi ne conteneva ancor molta. Su questa materia bianca polverulenta, insolubile cominciai il lavoro; espongo le mie esperienze ed i loro risultamenti.

1.° Il primo fenomeno curioso, che mi si presentò fu nella sua essicazione. Messa in una stufa a seccare prese una tinta rosea: quando poi fu bene asciutta era sotto forma d'una polvere bianco-cenerognola, con una leggiera tinta rossa bellissima, in parte impalpabile, ed in parte ruvida, scricchiolava fra i denti, non aveva sapore sensibile, nè tampoco alcun odore, insolubile nell'acqua, ed anche nell'alcool freddo, e bollente, senza azione sulle tinture di tornasole, e di violetta, non che sulle altre, che come queste sono adoperate per iscoprire la presenza sì degli alcali, che degli acidi.

2.° Messone alquanto su d'un carbone incandescente non s'infiammò, nè s'annerì, ma vi restò sopra, conservando il suo colore senza sviluppare odore, o gaz alcuno sensibile.

3.° Avendone esposta una piccola quantità all'azione del tubo ferruminatorio se ne fuse pochissima a gran stento,

e questa aveva un color rossigno, distinguibile pel contrasto del colore bianco, che ritenea la polvere, che non si fuse.

4.° Versato alquanto d'acido solforico diluto con quattro volte il suo peso d'acqua su d'una piccola porzione di detta polvere, succedette immantinenti una viva effervescenza, ed una porzione restò disciolta nel medesimo, essendo diminuita di volume, non sviluppossi per altro odore alcuno sensibile. Coll'aggiungere poi acqua alla detta soluzione essa divenne limpida, e ne precipitò una materia polverulenta, che si confuse colla parte rimasta intatta dall'acido, mentre nel tempo stesso una materia in fiocchi bianchi restò sospesa nel centro del liquore stesso: esposto questo miscuglio in una boccetta allattata all'azione del fuoco, prima d'arrivare al grado d'ebollizione, si vide diminuire la parte insolubile, il liquore restò per poco opalino, ma col semplice raffreddamento riacquistò la sua limpidezza, e la quantità della materia insolubile rimase la stessa di prima.

5.° Raccolta questa su d'un filtro, quindi lavata con acqua fredda sino a che non diede alcun segno d'acidità, quindi fatta bollire con acqua distillata diminuì in quantità, e l'acqua in cui succedette questa soluzione parziale acquistò la proprietà di cangiare in rossa la tintura di tornasole, e di violetta.

6.° Il precipitato residuo da questa soluzione è insolubile nell'acqua, inattaccabile dagli acidi solforico, e nitrico adoperti in quantità, ad un forte calore resta sempre sotto forma d'una polvere bianca, che si discioglie e quasi

per intiero in un eccesso d'acido solforico, e da questa soluzione può essere precipitata coll'acido ossalico sotto forma parimente d'una polvere insolubile, e nell'acido solforico stesso diluto in qualunque proporzione s'adopri, ed in un eccesso d'acido ossalico, il medesimo che servi a precipitarla.

7.° La piccola parte di polvere rimasta insolubile nell'acqua, e nell'acido solforico lo fu anche nell'acido nitrico, e idroclorico. Provai a fonderla in un ugual peso d'alcali, e di polvere, e riuscii per tal modo a discioglierla. Volendola esaminare isolata la precipitai dalla detta soluzione coll'acido solforico, e l'ebbi di nuovo sotto forma d'una polvere bianca, ruvida al lato, insipida, ed insolubile tanto nell'acqua calda, come nella fredda, dove serbata per certo tempo non cangiò nè punto, nè poco.

8.° Avendo fatto prova se il liquore avuto dalla filtrazione accennata al n.° 5 contenesse un qualche solfato solubile, oppure un ossido metallico qualunque, e ciò col solfato di soda, come col benzoato di soda, coi carbonati alcalini, coll'ammoniaca, non che col prussiato di potassa, non mi presentò alcun fenomeno sensibile.

9.° L'acido nitrico anch'esso versato su piccola quantità di questa polvere v'eccita una forte effervescenza, ne discioglie una porzione, e si vede precipitare al fondo del liquore una picciolissima quantità di materia insolubile, mentre una materia in fiocchi resta sospesa nel liquore, come succedette coll'acido solforico. Il liquore poi filtrato,

non dà come si disse al n.º 8 , indizio di contenere ossido alcuno , ma per mezzo di opportuni reattivi non vi si trova, che del nitrato di calce.

Da tutti i risultati sopra esposti , e messi a disamina partitamente , mi pare potersi con franchezza asserire , che la polvere sottoposta alle descritte esperienze altro non è che un composto di carbonato di calce , e di una notevole quantità di borato calcareo siliceo , essendone esclusa l'alumina : la forte effervescenza avuta coll'acido solforico , e nitrico prova l'esistenza dell'acido carbonico , giacchè non so qual altro acido operi una forte effervescenza cogli anzidetti acidi senza sviluppare odore alcuno sensibile. L'esperienza n.º 5 dimostra chiaramente l'esistenza dell'acido borico. Niun altro acido difatti si presenta come il borico allo stato concreto : aggiungasi , che come questo è insolubile nell'acqua fredda , e solubile nella bollente. Il precipitato poi n.º 6 , su cui ebbi i surriferiti risultati altro non può essere che un solfato calcareo , e l'esperienza al n.º 7 sulla picciola parte di polvere rimasta insolubile nell'acqua pura , e negli acidi , e che si fuse colla potassa , parmi non lasciare alcun dubbio essere d'essa nient'altro , che pura silice esistente nel miscuglio salino allo stato di combinazione chimica con qualche altra sostanza , che io credo essere la calce , e formare un vero borato calcareo siliceo , giacchè diversamente non potrebbe presentarsi nello stato d'attuazione , in cui quivi si mostra. Gli alcali , l'ammoniaca compresa , ed il benzoato di soda mettono poi fuori di



dubbio, che nella detta terra siavi mescolata dell'allumina, come il prussiato di ferro, e l'ammoniaca non vi dimostrarono mollecola alcuna nè di ferro, nè di rame.

L'acido nitrico colle esperienze riferite al n.º 9, e con diverse altre all'oggetto medesimo, che troppo lungo sarebbe di qui ripetere non fece, che vieppiù assicurarmi dell'esistenza delle accennate combinazioni saline, cioè del carbonato calcare, del borato calcare siliceo nel borace brutto da cui separai la polvere sperimentata.

Incoraggiato da sì belli, e ad un tempo novissimi risultati, avvisai di tentare la separazione degli anzidetti sali dal sottoborato di soda, e particolarmente dalla sostanza verdognola, persuaso che trovandosi questi allo stato di semplice miscuglio nel borace brutto, preso ad esaminare nel caso che i loro frantumi fossero abbastanza visibili per poterli separare, avrei potuto tentare sui medesimi delle esperienze più soddisfacenti, e decisive. Per ottenere l'intento procedetti alla soluzione del sottoborato diversamente da ciò che ho praticato di sopra: presi diversi cristalli di borace brutto, li misi nell'acqua bollente, dove gli lasciai per 10 minuti; se ne disciolse una gran parte, e non restò d'insolubile, che un sedimento, o polvere ruvida, la quale raccolta su d'un filtro, fatta bene asciugare, e osservata coll'occhio fornito d'una lente di mediocre ingrandimento parve composta:

1.º Di picciolissimi frammenti cristallini d'una sostanza bianca quasi trasparente, alcuni de' quali mostrano una forma



romboidale, anzi-che-nò schiacciata, e che rigano sensibilmente il vetro.

2.<sup>o</sup> D' una sostanza in frammenti d' una forma indeterminabile, con qualche traccia d' una materia biancastra alla loro superficie, d' un colore grigio chiaro, alquanto pel lucida, d' una spezzatura ineguale, terrosa, ed in qualche punto leggermente porosa, sèmpre però abbastanza dura per rigare il vetro.

3.<sup>o</sup> Di piccioli frammenti d' una sostanza turchina, d' una spezzatura uguale, informi, che non è rigata dall' unghia, ma che non è nemmeno abbastanza dura per raschiare il vetro.

4.<sup>o</sup> Di moltissimi pezzetti d' una sostanza, che s' avvicina più alla forma globulare, che a qualunque altra, opachi, d' un bianco latteo sudicio, che facilmente rigano il vetro.

5.<sup>o</sup> D' altre piccole mollecole d' un colore simile presso a poco a quello della cera vergine nostrale, forse più slavato, opache anch' esse, ed informi, che rigavano il vetro.

6. Per ultimo d' una sostanza cristallizzata regolarmente, di cui per mancanza di buona lente non potei determinare la forma, quasi trasparente, d' un colore giallo di zolfo slavato, che si potè sfrantumare dall' unghia.

Questi caratteri non devono aversi come esattissimi, giacchè essendo presi su piccoli frantumi possono facilmente far cadere in errore. Quanto poi alla quantità relativa di queste diverse sostanze trovate in 252 grani di materia

insolubile, residuo dalla soluzione del borace brutto, è approssimativamente la seguente: la sostanza giallastra, la turchina, e la verde giallastra vi sono in piccolissima proporzione le più abbondanti, e dalle quali si può dire, che risulta tutto il peso della sostanza insolubile; sono quelle descritte al n.º 2, al n.º 5, ed al n.º 1 in ordine decrescente.

Giunto a questi dati, intrapresi nove indagini su ciascuna delle descritte sostanze, che per ora riguarderansi tutte fra loro diverse. E fra le altre bramoso di conoscere la combinazione dell'acido borico colla calce; e colla silice, per vedere se ha qualche rassomiglianza con quella, che trovasi in natura, a cui i mineralogi diedero il nome di *Datolite*, trovai che la sostanza descritta al n.º 4 e 5 non può essere che la *Datolite* stessa amorfa, e sfrantumata, che in un col borace si raccoglie ne' contorni dei laghi, donde questo sottoborato ci viene. Il colore, e la durezza, e più di tutto il carattere che essa mi diede esposta all'azione del tubo ferruminatorio, e ad un forte fuoco di fusione, essendomivisi cangiata in uno smalto rosso, sono dati bastanti per provare decisamente essere la medesima vero borato calcare siliceo naturale. Ho fatto prova per avere le esatte quantità relative de' componenti il medesimo, ma essendo quasi impossibile di separarlo esattamente dal carbonato calcare con cui è quivi mescolato desistetti dall'intraprendere a tal fine qualunque altro lavoro.

Così il carbonato di calce reso manifesto ne' saggi precedentemente esposti, lo trovai isolato quasi perfettamente nella sostanza descritta al n.° 1. Difatti pressochè tutta, per mezzo di poc' acido solforico, dopo leggiera effervescenza si disciolse, e dopo pochi istanti si precipitò sotto forma di una polvere bianca, che invano tentai di nuovo disciogliere con acqua, ma che in parte si disciolse per una seconda addizione del detto acido, e da questa ultima si precipitò di nuovo in una polvere insolubile coll' acido ossalico, anche eccedente.

Queste ricerche analitiche estese anche sulle altre sostanze, cioè su quella descritta al n.° 2 e 3, ed al n.° 6, mi diedero risultati non meno interessanti, e nuovi di quelli, di cui già resi conto. Comincerò a parlare di quelli che ebbi sulla sostanza descritta al n.° 2.

Questa come altrove si disse quando è alquanto bagnata, ed umida pare verdognola, ma a misura che si asciuga prende un colore grigio cinereo più o meno chiaro. Il suo peso specifico è molto maggiore di quello dell' acqua, riga il vetro anche ridotta in polvere fina, è insipida, ionodorosa, scricchiola fortemente fra i denti, è insolubile tanto nell' acqua, come nell' alcool bollenti, per ultimo è inalterabile all' aria tanto secca, che umida, pare soltanto, che nel secondo caso prenda un colore più scuro, il quale si ravvicina al verdognuolo, che ha quando è bagnata.

a Al tubo ferruminatorio sembra, che provi un principio di fusione, ma è leggerissimo.

*b* Dieci grani della data sostanza messi in un crogiuolo, che tenni rovente per più di 15 minuti non produssero alcun fenomeno sensibile nè s'alterarono positivamente.

*c* Cinquanta grani della medesima mescolati esattamente colla metà del loro peso di nitrato di potassa, e gettato il detto miscuglio a riprese in un crogiuolo rovente, succedette la deflagrazione del nitro, ma non s'ebbe altro fenomeno. Si formò una massa pochissimo aderente, giacchè colla semplice pressione del dito mignolo si sfrantumò interamente. Fatta questa bollire con acqua distillata, e fatta prova se mai, in seguito dell'ebollitura si fosse reso manifesto qualche acido, tanto colla tintura di violetta, come con quella di tornasole, non s'ebbe il menomo effetto.

*d* L'acido solforico purissimo, sì a freddo, come a caldo non l'altera sensibilmente, giacchè avendone messi alcuni grani dentro, e lasciatevili per alcune ore in digestione, sia alla temperatura ordinaria, come ad una temperatura alquanto elevata, essa non diminui sensibilmente di peso, nè cangiò di colore, di durezza ec. poichè lavata nell'acqua, ed asciugata aveva gli stessi caratteri di prima.

*e* L'acido nitrico versato su 100 grani della medesima non vi produsse neppur esso il menomo effetto sensibile, tanto a caldo, come a freddo, e non fece che pulirla dalla poca polvere bianchiccia, da cui era asperso qualcuno dei granellini della medesima, come più sopra avvertii, e nulla più. La perdita avuta da tale lavatura si potrebbe forse calcolare ad un grano circa in peso. Conservò nel resto

tutti i suoi caratteri già esposti fuorchè il colore : farò quì a questo proposito osservare , che per tale lavatura il colore de' granellini immersi nell'acido nitrico si alterò leggermente , alcuni cioè presero un colore verde più chiaro , altri invece ritennero costantemente il loro colore grigio , e questi ultimi mi fecero per poco supporre , che potesse esservi dell'ossido di boro ; ma tale supposto svanì ben presto riflettendo , che in tal caso per mezzo dell'acido nitrico sarebbe questo passato allo stato d'acido borico , anche alla temperatura ordinaria dell'atmosfera , e che per conseguenza i detti granellini scuri avrebbero dovuto scomparire , e presentarsi in forma di polvere bianca , sotto la quale si riconosce l'acido borico ; ma nulla succedette di tutto questo , poichè anche dopo alcuni giorni esistevano nel liquore i granellini sotto l'istesso aspetto , ed avendoli separati per decantazione dall'acido nitrico , asciugati , e pesati trovai , che nulla affatto avevano perduto del loro peso.

*f* Volli anche provare l'azione del clorino su questa sostanza , per vedere quali fenomeni avrebbe prodotti , ma sì a caldo , come alla temperatura ordinaria nulla comparve.

*g* Impastatine per ultimo 10 grani con altri 10 grani di sottocarbonato di potassa , ed esposto il mescolaglio alla fiamma del tubo ferruminatorio , il medesimo si fuse , e penetrò il carbone su cui crasi operata la fusione. Staccatolo in scorie , e messo nell'acqua tiepida si disciolse , e coll'acido solforico versato in questa soluzione si precipitò



una polvere bianca, lucida, dura, che rigava sensibilmente il vetro, ed insolubile nell'acqua sì fredda, che bollente. L'istesso risultato ottenni col sottocarbonato di soda.

Quale illazione si può ora trarre dai risultati avuti colle descritte esperienze? Niun'altra a mio avviso, se non quella, che la sostanza descritta al n.º 2 non è, che pura silice. Non è che l'arena silicea de' laghi dove si prende il borace brutto, o la terra nitrosa con cui desso si fabbrica, la quale resta accidentalmente mescolata colla porzione di sottoborato di soda, che si cristallizza coll'evaporazione delle acque de' laghi stessi. Si dirà forse che per dimostrare la sostanza n.º 2 non essere altro, che pura silice, non era necessario tentare parecchi degli esperimenti da me riferiti; ma è a sapersi che quando intrapresi l'esame della medesima era meno persuaso, che ella potesse essere silicea, di quello, che il fossi di riconoscerla per *boro*, o sostanza analoga, ed alla ricerca di questo colla massima diligenza m'occupai ripetute volte; e non fu, che dopo avere veduto diversi esperimenti andati a vuoto, che restai persuaso, il borace da me analizzato essere ben diverso da quello, nel quale altri rinvenne questa rarissima sostanza combustibile semplice.

Più facile, e non meno sicura della precedente fu la determinazione della materia descritta al n.º 3. Avendone messo alcuni granellini, nell'acido nitrico purissimo alquanto diluito, essi si disciolsero per intiero senza effervescenza almeno visibile. Versata in questa soluzione della tintura



di galla aleoolica, non succedette alcun fenomeno: ma appena vi versai alcune gocce di soluzione alcalina prussiana, tutto il liquore prese un colore verde, e dopo 3, o 4 ore d'esposizione all'aria, acquistò un colore turchino intenso, come il più bello azzurro di Berlino. Procurai colla separazione d'altri granellini di avverar bene quanto asserisco, ed il risultato fu sempre lo stesso. Rame non ve ne può essere, giacchè l'ammoniaca, colla quale provai l'anzidetta soluzione nitrica de' granellini di cui si tratta, non diede colore alcuno al liquore, ed il prussiato di potassa, supposto, che vi fosse stato del rame, avrebbe dato un precipitato giallo di mattone: si può quindi senza dubbio concludere, che tali granellini altro non sono, che un perossido di ferro: come tale difatto non fu la sua dissoluzione sensibile colla tintura di galla, e si colori sull'istante piuttosto in verde, che in turchino il liquore, che lo teneva disciolto, sperimentato col prussiato alcalino, carattere fissato da Gay-Lussac per conoscere appunto il perossido di ferro dagli altri gradi d'ossidazione di tal metallo.

Non mi resta più, che a parlare della sostanza descritta al n.º 6, ma nulla che sia veramente esatto ne posso dire, giacchè non mi è riuscito di poterne isolare, che piccolissime mollecule insufficienti per potere intraprendere un rigoroso esame: egli è però molto probabile, da alcuni saggi fatti sui pochi frantumi, che potei isolare, che ella sia d'una composizione analoga a quella descritta al n.º 1.

Quanto poi al sapone a base di soda, di cui trovansi

imbrattati i cristalli del borace brutto, al dire del signor Vauquelin, esso vi si trova di certo, ma bisogna esaminare la soluzione del detto sale senza filtrarla per poterlo riconoscere, giacchè diversamente è difficilissima cosa, poichè la soluzione filtrata, ed evaporata da del borace bianco cristallizzato bellissimo, in cui è quasi impossibile riconoscere l'esistenza di tale composto. Egli è d'altronde anche probabile che più non vi sia, giacchè non trovandovisi, che in piccola quantità, può facilmente essere decomposto: la soda in tal caso si combinerebbe coll'acido borico, e la piccola porzione di sostanza grassa-oleosa alla medesima combinata si perderà nelle decantazioni, e lavature del borace cristallizzato.

Altra sostanza animale solubile non so che possa essere mescolata con questo sale, poichè una soluzione di concino, non produsse il menomo effetto in questo sale disciolto nell'acqua anch'esso.

Riassumendo ora quanto si è da me osservato sulla composizione del borace brutto di Bengala, parmi, che per conseguenza de' risultati avuti convenga ammettere:

1.<sup>o</sup> Non esservi nel medesimo di puro sottoborato di soda, se non la parte, che se ne discioglie, giacchè la soluzione fatta del borace brutto, che servì alle precedenti esperienze cristallizzate, diede de' cristalli bellissimi di borace, bianchi, e che in nulla erano differenti dal borace raffinato di Olanda.

2.<sup>o</sup> La porzione rimasta insolubile altro non essere, che

un miscuglio di silice, od arena de' torrenti, carbonato di calce, e borato calcare siliceo, con qualche poco di perossido di ferro.

3.<sup>o</sup> Essere per ultimo detto borace brutto insudiciato da un sapone a base di soda, che vedesi, separato in fiocchi, galleggiare sulla soluzione del medesimo.

Ciò posto, mi si chiederà come si possa rendere ragione di quanto succede nella raffinazione di questo borace brutto. Vi sarà certamente una perdita notevole nel peso; giacchè oltre il sapone a base di soda, la silice, ed il carbonato calcare, che vi si trovano, le quali non hanno che fare col borace raffinato, si deve ancora aggiungere la manifattura, o le spese necessarie alla detta purificazione; eppure il borace raffinato, in vece d'avere un prezzo maggiore del brutto, lo ha minore: o il borace brutto contiene la sostanza capace, colla raffinazione, a far aumentare il peso del prodotto raffinato, o che i fabbricanti ve l'aggiungono a vilissimo prezzo.

A questo rispondo: il miscuglio insolubile, da quanto si è stabilito, risulta da ciò, che contiene sostanze libere capaci a produrre del nuovo borace, giacchè io non vi potei scorgere la benchè menoma traccia d'acido borico libero, come *Baumé* dice avervi trovato, nè so concedere, che lavato ripetute volte il medesimo residuo insolubile del borace con acqua bollente, possa ancora contenere del sottoborato di soda, come *Cadet* suppose, il quale soltanto per un particolare segreto de' raffinatori diverrebbe solubile,

e cristallizzabile: nè per ultimo crederò questo essere prodotto dall'acidificazione del boro, o base dell'acido borico, che *Mojon* trovò nel borace brutto da lui analizzato, mentre a me non riuscì di rinvenirla. Un'altra origine credo avere l'acido borico, che, colla raffinazione, serve alla produzione di una nuova quantità di sottoborato che prima non esisteva, cioè dalla decomposizione del borato calcare siliceo, che in detto residuo insolubile ritrovasi, ed in questo modo ciò può avvenire: è noto, che la calce, e la silice ad un calore assai forte si fondono, si compenetrano, e formano uno smalto insolubile nell'acqua. (Notisi che questo sarebbe anche più facile assai se vi fosse dell'allumina, quantunque io debba confessare di non averne trovato). Questo succedendo nelle fabbriche di raffinazione per mezzo di fornelli adattati, si avrà allo stato libero quella quantità d'acido borico, che formava il borato calcare siliceo mescolato col borace brutto; per separare il quale non faranno, che polverizzare lo smalto ottenuto, e farlo bollire nell'acqua, poichè in tal caso l'acido borico vi si scioglierà intieramente, e di questa soluzione si serviranno per formare la quantità di borace, o sottoborato di soda, che serve a pagare le spese della raffinazione, e ad aumentare il peso del prodotto netto per modo, da poter vendere il borace raffinato ad un prezzo minore di quello, che loro costi brutto, od impuro.

Certamente, una tale operazione non sarebbe eseguibile se vi fossero altri acidi, eccettuato il borico, ed il fosforico;

poichè, per rispetto all'acido solforico molta se ne perderebbe, e per la sua volatilizzazione, e per la sua decomposizione: e il nitrico tutto certamente si decomporrebbe, e così succederebbe del muriatico, o idroclorico. Solamente i predetti due acidi rimangono inalterabili anche ad un'altissima temperatura: il fosforico si fonde, e si volatilizza, il borico si fonde, e si vetrifica senza scomporsi, ma sull'esistenza dell'acido fosforico non può cadere nel nostro caso alcun sospetto.

Nè per altro procedimento io credo essersi formato, od avere avuto altra origine differente da quella testè esposta, l'acido borico puro trovatosi ultimamente da *Lucas e Maraschini*, concreto, ed in forma di pagliette nel cratere dell'isola di Vulcano, come pure quello scoperto dal Cavaliere *Monticelli* Segretario della Reale Accademia di Napoli presso una fumarola del Vesuvio. Un qualche borato sarà venuto a contatto dell'attivissimo fuoco vulcanico, sia esso per supposto, un borato di silice, di calce, o d'allumina (si potrebbe anche supporre d'un'altra base, ma credasi di queste, per la grande quantità delle medesime di cui trovansi composte le lave vulcaniche), è certo che succedette la completa sua fusione. Niente di più probabile in tal caso, che o per il suo peso specifico, che deve certamente diversificare da quello, che avranno i detti ossidi fusi, o per qualche altra causa a noi ignota (e molte ne sono ancora nascoste a chi studia i vulcani) sia rimasto lo stesso, dopo essere stato slanciato fuori del margine del vulcano, separato dalle anzidette basi fuse.



Fin quì un' ipotesi fondata sulla cognizione distinta delle proprietà chimiche, particolari alle sostanze isolatamente prese, è stata lo scopo del mio esame. Restavami a tentare l'esperienza, per cui l'ipotesi enunciata, dallo stato di massima probabilità progredisse a quello di fisica certezza, quantunque sia dimostrato, che soventi in chimica un' ipotesi non tralascia d'essere certa per raziocinio, sebbene non se ne possa fare la dimostrazione per via d'esperienze dirette; ora avendone fatto prova, dirò francamente quello, che ottenni. Avendo messo il miscuglio, o residuo insolubile, residuo dalla soluzione del borace brutto in un crogiuolo, che tenni rovente per più di due ore, non mi riuscì di averne la fusione, epperciò non ne potei separare l'acido borico, che conteneva; non ebbi, che la decomposizione del carbonato calcareo, poichè l'acido solforico lo disciolse, o combinossi colla calce senza effervescenza. Valgami però il far quì osservare, che quest'operazione deve essere molto difficile in ragione appunto della grande quantità di carbonato calcareo, e della silice, che in detto miscuglio ritrovasi; ma se avessi avuto fornelli addattati a tali operazioni, non mi sarebbe certo stato impossibile di eseguirla. Intanto poi io dissi essere questo il procedimento, che è probabile, che s'impieghi nelle manifatture di raffinazione di questo sale, il borace brutto, in Olanda, non già per essere il solo, ma a mio parere il più economico; poichè quei fabbricanti Olandesi potrebbero in vece servirsi dell'acido solforico, che combinandosi colla calce del borato



calcare siliceo , metterebbe a nudo l' acido borico. Nulla poi di più facile, che, separato con acqua bollente, e così disciolto, combinarlo colla soda, onde averne la quantità di borace, necessaria per poter smerciare il medesimo raffinato a minor prezzo del borace brutto.

Il fin qui esposto sulla composizione chimica del borace brutto di Bengala sarà anche provato da quanto sono per dire dell' altra specie di borace, che ci viene dal levante, che esaminai, e la quale sarà la materia della seconda parte di questa memoria.

## PARTE II.<sup>a</sup>

### *Del Borace raffinato d' India.*

Questa specie di borace, che da noi vien detta *Borace raffinato d' India* è invero anche apparentemente più pura, e netta della precedentemente descritta. Essa è sotto forma di cristalli prismatici ben determinati, i quali sono aderenti, e come incassati in uno stato composto del sale cristallizzato confusamente, ed amorfo nella sua parte inferiore: talora anche questa presenta de' rudimenti di forme cristalline, ma ciò ben di rado si osserva; per lo più essa è coperta da un sottilissimo strato del detto sale amorfo, che ha una leggiera tinta grigio-scuro procedente forse dagli utensili ne' quali si eseguisce in que' paesi dell' Asia la sua raffinazione. I cristalli del detto sale isolati sono bianchi, leggermente efflorescenti alla loro superficie, hanno

una spezzatura glaciale come il borace raffinato d'Olanda, mentre il sale amorfo ha una spezzatura molto simile a quella del carbonato calcareo saccaroide, e vi si vedono come in questo de' punti lucicanti, e fini. La durezza del cristallizzato è uguale a quella del raffinato d'Europa, quella in vece dell'amorfo è alquanto maggiore, giacchè non sempre riesce di rigarlo coll' unghia. Quest' ultimo poi ha una trasparenza nuvolosa ne' suoi spigoli soltanto, ed il cristallizzato ha la detta trasparenza in tutte le sue parti. Finalmente il peso specifico d'ambidue è maggiore di quello dell' acqua distillata, ma quello dell' amorfo è sensibilmente più pesante dell' altro.

Questa qualità di borace è solubile per intero nella stessa quantità d' acqua fredda, e bollente come il raffinato di Olanda, e la sua soluzione è scolorita, limpida e trasparente, solo dopo 10 o 12 giorni lascia vedere nel suo fondo una specie di nubolosità, che non è nel liquore stesso, ma sulle pareti della bottiglia sulle quali si è depositata una materia bianca, quasi insolubile nell' acqua fredda, e facilmente solubile nella calda, e bollente, di cui più estesamente parlerassi in appresso. Al fuoco si gonfia, si fonde scoppiettando, e divien secca sebbene alquanto più difficilmente del borace raffinato in Europa, s' arroventa in seguito, e finalmente si vetrifica.

Per vedere se la soluzione avuta di questo sale era una soluzione di puro sottoborato di soda, ciò che è difficile a credersi, presentando fra gli altri il carattere di

scoppiettare, che non si osserva nel raffinato d'Olanda, e che non è certamente, sua proprietà, feci sulla medesima le seguenti esperienze.

1.° Dopo averne disciolti 80 scrupoli nell'acqua bollente, e per mezzo del filtro separata la piccola quantità di materia insolubile che contenevano, la quale era appena 10 grani di peso, sopra una piccola porzione dell'anzidetta soluzione versai della tintura di tornasole, e questa non restò nè punto nè poco alterata, quando per l'opposto s'inverdi il sugo di violetta, e s'arrossì la tintura alcolica del legno di Brasile.

2.° Il nitrato di barite versato a gocce in una picciola quantità dell'accennata soluzione la rendette lattiginosa a un tratto, e poco dopo diede un abbondante precipitato bianco in fiocchi, i quali si deposero al fondo del liquore stesso. Separato col filtro questo precipitato, e versatovi sopra alcune gocce d'acido nitrico esso si disciolse interamente senza effervescenza, e questa soluzione limpida di nitrato di barite allungata con acqua diede una polvere bianca solubile nell'acqua calda, la quale divenne così atta a colorire in rosso il tornasole.

3.° Il nitrato d'argento pure quasi in un istante rendette questa soluzione opaca, e tale si conservò anche dopo avere aggiunto al liquore alcune gocce d'acido nitrico, per assicurarmi se tale opacità provenisse dall'eccesso dell'alcali, che il sale contiene, indicatomi dai riferiti reagenti, oppure dall'esistenza d'un muriato. Avendovi poi versata

dell'ammoniaca, il liquore riacquistò la prima sua limpidezza.

4.° Il nitrato di mercurio preparato a freddo produsse anch'esso nella stessa soluzione un abbondante precipitato bianco.

5.° Gli acidi solforico, nitrico, e muriatico non intorbidarono nè punto, nè poco la soluzione di questo borace raffinato; non succedette, che la precipitazione d'una piccola quantità di polvere bianca, che dopo essere stata ben lavata con acqua fredda, in cui restò indisciolta, trovai che si disciolse nell'acqua bollente, dando a quest'ultima la proprietà di colorir in rosso il tornasole.

6.° L'acido ossalico rendette il liquore leggermente opalino, coll'aggiunta di poc' alcali non diminuì, nè s'accrebbe l'opacità del medesimo. Versatovi su una dose eccedente dell'istesso acido ossalico non v'osservai il menomo cangiamento.

7.° La soluzione di succinato di soda pare che vi produca un leggierissimo precipitato bianco.

8.° La tintura di galla alcoolica, e la soluzione del prussiato alcalino non vi produssero il benchè menomo effetto sensibile.

9.° Il concino non vi produsse alcun fenomeno.

Quale induzione si può tirare dagli esposti saggi analitici? Che nella soluzione del borace raffinato d'India, oltre la combinazione dell'acido borico con una dose eccedente di soda, evvi anche un muriato, della calce, e forse della

allumina. In vero col risultato avuto per mezzo del nitrato di barite avrei creduto a prima vista esservi anche un solfato, ma la soluzione per così dire istantanea, che, del precipitato avuto con questo reattivo, operò l'acido nitrico, mi provò, che il precipitato avuto, lungi dall'essere un solfato di barite, doveva essere in vece un borato di detta base. Nè era facile a prendere uno sbaglio soltanto nella determinazione di detto precipitato, era anche equivoca per somigliante ragione la natura del precipitato ottenuto col nitrato d'argento, se per mezzo d'un alcali fisso prima, e poi coll'ammoniaca non l'avessi provato: la ridissoluzione dello stesso nell'alcali volatile m'assicurò esistere nel liquore un muriato. Il nitrato di mercurio preparato a freddo, e di recente, che secondo Psaff è un reagente anche più sensibile per l'acido muriatico, di quello che sia l'istesso nitrato d'argento, confermò anch'esso l'esistenza d'un muriato nella soluzione di questo borace dell'India. Gli acidi non fecero in generale che impadronirsi della base di questo borato, e precipitarne l'acido borico. L'esistenza della calce è bastantemente provata dal risultato avuto colla esperienza tentata coll'acido ossalico, come si disse al n.º 6. Molto dubbiosa è, a mio credere l'esistenza dell'allumina; che se ve n'è, vi si trova certo in pochissima quantità.

Una domanda potrebbe qui farsi su questo proposito, ed a cui nulla di soddisfacente io avviso che si possa rispondere. Esiste in questo sale dell'acido muriatico, vi si trova anche della calce, queste due sostanze vi sono esse combinate allo stato di muriato di calce? Io credo di no: prima di



tutto risulta, che vi sono in pochissima quantità, e poi penso che l'acido muriatico vi sia combinato chimicamente colla soda, mentre la calce vi è probabilmente allo stato di semplice miscuglio. Nè a ciò mi si opporrà, che gli acidi avrebbero in tal caso dovuto produrvi un effetto diverso dall'esposto: trattandosi di picciolissime proporzioni d'un alcali carbonato disciolto in una grande quantità d'acqua, la combinazione non si opera in un modo sensibile, avvegnachè succeda, come lo provano le tinture turchine vegetabili, che non inverdiscono, nè divengono più rosse. Altronde con questo mezzo è trovata la causa che fa scoppiettare questo borace al fuoco, sebbene io non dissenta, che altre cagioni possano produrre un tal fenomeno.

Parlando di sopra della solubilità di questo borace d'India feci menzione d'una materia insolubile nell'acqua fredda, e solubilissima in vece nella calda, che dissi essersi precipitata al fondo della soluzione del detto sale lasciata in riposo per diversi giorni. Tutto ciò che mi è riuscito di conoscere intorno alla sua natura è il seguente. Fatta evaporare a pellicola, per vedere se poteva averne de' cristalli, non mi riuscì di vederne, la massa però parve che prendesse una forma cristallina confusa alla sua superficie; il detto liquore però non tinse in rosso il tornasole, inverdì in vece la tintura di violetta. Portata a secchezza era sotto forma d'una sostanza bianca, che incrostò le pareti della capsuletta di porcellana, alle quali restò alquanto aderente, essendo stato obbligato a staccarnela a forza con una lamina di coltello, e gran parte non si staccò, che dopo



avervi fatto bollire entro dell'acqua. La quantità staccata sotto forma di polvere era in peso grani 4, vi si vedevano delle piccole squamette lucicanti, era piuttosto morbida, che ruvida al tatto, e presentava un colore grigio di cenere: fatta sciogliere col residuo rimasto aderente alla capsuletta, che poteva essere circa due grani, nell'acqua distillata, dopo varie esperienze tentate sulla detta soluzione, trovai essere la medesima un borato calcare siliceo, che sta per qualche tempo sospeso, e come disciolto unitamente al sottoborato di soda, ma che col lungo riposo si precipita al fondo del medesimo.

Al n.° 1, dove dissi avere operata la soluzione di 80 scrupoli di questo borace mezzo raffinato d'India, affermai ancora avere ottenuto da 8 a 10 grani d'una sostanza insolubile: da qualche saggio fatto sulla medesima risulta altro questa non essere che carbonato calcare con poca arena silicea, e forse anche con borato calcare siliceo.

Riepilogando ora il fin quì detto intorno alla composizione di questo sale, risulta essere la stessa che quella della varietà precedentemente esaminata: in questo però le materie insolubili vi sono in pochissima quantità, in paragone del peso, che hanno nel primo esaminato: diffatti su 1320 grani di detto borace d'India non vi sarebbero, tutto ben ragguagliato, che 16 circa grani di sostanze insolubili, mentre in quello di Bengala su 2400 di dette sostanze insolubili ve ne furono 284 grani. Non pongo qui a calcolo la porzione d'acido muriatico, e di calce, che si rese

sensibile ai reattivi, come ho detto di sopra, ma essa è in quantità così picciola, che non può contribuire a notabile aumento nel peso di sopra fissato.

Il procedimento di raffinazione per questa specie di borace dovrebbe adunque consistere nel finir di privarlo di tutta la materia insolubile, che ancora contiene, ciò che è pur facile ad ottenersi, e per mezzo di ripetute filtrazioni, e con lasciare in seguito il liquore filtrato in riposo per più giorni, e nel togliere per ultimo al medesimo la picciola porzione d'acido muriatico, che v'è mescolata in combinazione colla soda. Quest'ultima operazione è forse non poco malagevole, e costerebbe più della prima; ma v'è da altra parte un considerevole vantaggio nel prezzo al quale si compra questo borace, paragonato con quello d'Olanda. Mi si accerta, che in Francia siasi in fatti calcolato questo grande vantaggio, che siansi a tal oggetto stabilite delle raffinerie pel medesimo, e che vendasi colà ad un prezzo inferiore a quello, che si vende il borace d'Olanda: ma il difetto che ha di scoppiettare al fuoco, mentre prova l'incapacità del procedimento col quale si raffina, lo fa rifiutare da molti consumatori in digrosso. Ora poi potrebbesi assicurare, che fra non molti anni, non solamente non troverà più smercio questa specie di borace, ma nè anche quella d'Olanda, in ragione del prezzo, che non potrà stare in concorrenza con quello al quale potressi vendere il borace che si fabbrica in Toscana, sul quale fra non molto, come spero, manderò altra memoria a cotesta Reale Accademia di Scienze.

## DE NATURA VEGETABILI GORGONIARUM

AUCTORE G. L. C. GRAVENHORST

PROFESSORE VRATISLAVIENSI.

*Lecta die 24 junii 1821.*

Gorgonias Sertulariasque, imprimis truncum earum, accuratius inspicienti, semper dubium mihi exortum est, num haec corpora forsitan vegetabilium instar nascantur et evolvantur. Quod alii aevi remotioris naturae scrutatores jam cogitaverant, truncum Gorgoniarum plantam esse, extrinsecus polypis obsessam et indutam, primo mihi in mentem venit. Inter plures autem Gorgonias Musei Universitatis Vratislaviensis duo exemplaria illi opinioni haud respondere videbantur. In uno lapide nempe Gorgoniae verrucosae exemplar egregium, aliudque haud deterius Gorgoniae miniaceae ita enata sunt ut trunci eorum, immediate supra radices, intervallo parvo trium linearum inter se distent, radicesque amborum se attingant. Rami radicesque trunci utriusque cortice polypifero dense induti sunt. Licet autem amborum rami multis locis se attingant, nulla attamen particula corticis polypiferi unius trunci in alterum transiit, quod vero, ut opinabar, vix inevitabile fuisset, si polypi fortuito et extrinsecus advenissent. Ex eo tempore propensus

eram, opinionem sequi quam Basterus posteaque Linneus de his corporibus fovebant, truncum nempe vegetabiliter exerescere, serius autem ex ejus substantia interna (medulla) partem animale (polypos et corticem) evolvi et pullulare. Cum vero de hac re non nisi ipso loco, ubi haec corpora vivunt et crescunt, dijudicari posset, cum etiam Donatius Cavolinus alique ortum Gorgoniarum et Corallii ex ovis, Cavolinus autem speciatim originem trunci Gorgoniarum e cortice earum animali, descripsissent, non ausus sum istam Basteri opinionem publice suscipere et defendere, nec enim nisi exemplaria demortua et sicca illorum corporum, qualia in museis asservantur, videram. Nunc autem ex quibusdam Gorgoniis, quas collega aestimatissimus Otto, anno praeterito, ex itinere italico reportavit, *de natura vegetabili trunci Gorgoniarum, deque polyphis earum extrinsecus advenientibus certior factus sum*. Quidam nempe sunt Gorgoniae verrucosae trunci nitidi, quorum rami passim, spatiis brevioribus longioribusve, cortice rubro Gorgoniae coralloidis, cellulis flavis bene distincto, induuntur. Ne autem existimetis, ramulos, hoc cortice rubro vestitos, forsan parasitice in trunco Gorgoniae verrucosae exortos esse, scitote, me locis istis, ubi cortices Gorgoniae verrucosae et coralloidis se attingunt, corticis utriusque portiuncula detrita, nullum ejusmodi insitionis seu inoculationis trunci alieni invenisse, sed truncus ejusque rami ubicunque unum solidum simillimum integerrimum, nulla sutura seu callositate interruptum, exhibent; insuper autem ramuli quidam

teneriores, e ramulo cortice rubro vestito, perque ipsam corticis rubri substantiam provenientes, extremitatibus cortice albo Gorgoniae verrucosae vestiti sunt. Caeterum cortex ruber circa truncum format cylindrum aequae arcte adhaerentem ac cortex albus, nec supra hunc impositus est, cujus polypī, ut opinor, talem suppressionem vix passi essent. Ilac ratione etiam in truncis istis duobus vicinis, quorum antea mentionem feci, cortices separati permanserunt; posito enim, ambos truncos jam aetate tenera cortice polypifero indutos esse, truncumque et corticem simul et unum pariter cum altero ita accrevisse, ut nullus locus cortice denudaretur, quo ovula seu polypī alterius speciei adhaerere se potuissent, factum illud truncorum vicinorum inmixtorum haud obstat opinioni meae, cujus confirmandi causa omnia ea nunc accuratius examinabo, quae de natura animali trunci, atque de ejus ortu e cortice polypifero scripta sunt.

Eodem fere tempore, quo naturae scrutatores certiores facti sunt, partes illas horum zoophytorum, quae cotenus flores nominabantur, polypos esse veros, *de odore animali coralliorum, nec non de analysi eorum chemica* argumenta quoque sumebantur, haec corpora in regnum animale translocandi. Experientiae a me ipso institutae me docuerunt, truncos Gorgoniae verrucosae et Gorgoniae placomus, cortice polypifero bene detrito et absterso, combustione odorem penetrantem ammoniacalem spargere, eundemque odorem etiam, licet minus penetranter, combustione fucorum



perceptibilem esse. Ille odor autem momenti est levioris, Hatchettio observante materiam scytodephicam vegetabilem odorem exhalare similem illi qui e combustione corporum animalium emanat (1). Licet porro analysibus recentioribus probatum esse videatur, partes constitutivas trunci Gorgoniae gelatinam esse et calcem phosphoricam, seu, ex aliis experientiis, substantiam corneam, his attamen natura ejus animalis nullo modo irrefutabiliter manifestata est; nam corallinae quoque et quaedam alcyonia, nostro tempore, imprimis secundum observationes Cavolinii et Schweiggeri (2), pro plantis declarata, elementa continent regno animali propria credita; idem valet de boletis et de spongiis, quas Spallanzani et Okenius (3) pro plantis habent. Sage (4) autem, qui non solum e fucis elementa animalia extrahebat, sed in hac planta marina, acido nitrico diluto digesta, rete cartilagosum simile observabat, quale in ossibus madreporisque se manifestare solet, postquam partes terrenae eorum dissolutae sunt, inde fucos pro polypis habet.

Si demonstrari posset, *truncum Gorgoniarum e cortice earum deponi, vel hunc in illum mutari*, uterque pro producto animali existimandus foret. Cortex siccus et demortuus non solum perfacile a trunco deteri potest, sed

(1) Gehlen Journal für Chemie I p. 565.

(2) Beobachtungen auf naturhistorischen Reisen.

(3) Isis 1818, VIII p. 1273, 1819, III.

(4) Wiener Lit. Zeit. 1815, Intellig. 31 p. 247.



haud raro sponte decedit, nullis relictis notis, cum cum trunco intime conjunctum seu connatum fuisse; quod quidem hic levioris est momenti, cum potius observatores respiciendi sint, qui haec corpora viventia, saltem cortice adhuc molli induta, examinaverunt. Donatius, Cavolinus et Schweiggerus, viri, observationibus suis excellentissimis, de cognitione nostra accuratiore horum corporum optime meriti, describunt quidem vasa, truncum inter et corticem corallii et gorgoniarum decurrentia, nec vero dicunt, haec vasa in truncum penetrare. Truncum vero ex horum vasorum contentis deponi, corticemve animale in novum trunci stratum commutari, hypothesis est, cujus propugnator precipuus, laudatissimus Schweiggerus, ipse confitetur, responsionem ad quaestionem de ortu novi corticis polypiferi adhuc desiderari; idem addit quoque, se inter multa Gorgoniae verrucosae et coralloidis individua, loco earum natali examinata, nullum reperisse, quo transitus corticis animalis in truncum, seu reproductio corticis, se manifestavissent. Secundum Cavolinum truncus corallii, vestigiis et reliquiis omnibus corticis polypiferi bene detritis, acido nitrico digestus, rete distinctum cellulosum relinquit, quod, ex ejus sententia, vehiculum est et medium conjungens particularum calcarearum, quibus truncus duritiem suam debet. Sed corallinae quoque, quae jam a Spallanzanio, Olivio, Cavolinio aliisque, pro plantis declaratae sunt, quarumque natura vegetabilis, temporibus recentissimis, a Schweiggero confirmata est, acidis digestae, simile relinquunt rete

fibrosum seu filamentosum. Donatius in trunco corallii interdum radios observavit, e peripheria trunci axin versus tendentes. Omnibus his observationibus autem nexus hujus retis horumque radiorum cum polypis haud demonstratus est. Truncus Gorgoniarum fibris longitudinalibus arcte junctis constat; nexus ejus cum cortice polypifero, secundum Cavolinium, perlaxus est; cortex facile ab eo sejungi potest, immo sejunctus, functionibus animalibus nullo modo interruptis, per se porro vivit. Donatius quidem adnotavit, cellulas polypiferas corallii rubri aliquantulum in substantiam duram trunci se imprimere, cavitatesque in ea efficere; his vero nexus intimus haud probatur, sed, cum Donatius addat, cavitates istas, quo radici propiores, eo planiores minusque profundas esse, potius inde concludere possem, truncum corallii initio satis mollem esse ut impressionibus polyporum inhabitantium cederet (nam, e Donatii observatione, ramulorum corallii extremitates primo molles sunt, deindeque indurescunt), has impressiones autem, ubi cortex polypiferus demortuus sit, quod, secundum Cavolinium, ab imo summum versus fit, primo ergo circa et supra radicem, sensim obliterari. Quae autem in truncis corallii rubri, quos coram habeo, pro talibus impressionibus haberi possunt, adeo sunt planae et inconspicuae, ut strias longitudinales in superficie trunci nullo modo interrumpant aut debilitent; multo minus autem ullo loco, vel ope lentis auctoris, vestigium quoddam aut porus conspicitur, ex quo colligere liceret, organa polyporum

in truncum se extendisse. Schweiggerus citat piscatores corallii contententes, se corallium rubrum et Gorgoniam verrucosam semper cortice spongioso induta invenire, atque ex hac assertione, junctim cum observata structura Gorgoniae, in cujus trunco longitudinaliter fissis strata concentrica una in alteris inclusa apparent, aeque ac amicula chartacea in anniculis, quod etiam de stratis arborum dicotyledonearum valet, auctor colligit, truncum Gorgoniarum haud, sicut in reliquis coralliis, ab imo summum versus mori, sed, per totam Gorgoniae vitam, imo summoque polypis obsessum esse; quod quidem concedendum foret, nisi his celeberrimus Schweiggerus id, quod adhuc demonstrandum est, truncum nempe a polypis ortum ducere, jam pro demonstrato posuisset. Si fortassis Milleporas Madreporas etc. qua corpora analogae allegare et contendere velles, eodem modo quo illarum animalia sceletum suum lapideum ipsa conficerent, polypos quoque Gorgoniarum et coralli rubri truncum suum ipsos excernere, nullo modo hoc concederem. Verum quidem est, polypos Milleporarum genuinarum (multa enim corpora, quae hucusque eis adnumerare solebamus, haud sunt Milleporae; quaedam immo in regnum vegetabile amandari debent, quod Schweiggerus demonstravit) polypis Gorgoniarum similes esse videri; nulloque succumbit dubio, quin sceletum suum ipsi excernant, cum non solum satis manifeste intra illud extendantur, sed, quod e cellulis et meatibus sceleti colligere licet, spatium saepe majus quam haec massa lapidea occupaverint. Ille vero

sceletus haud trunco Gorgoniarum sed potius crustae calcareae ejus respondet, hoc tamen discrimine ut incrementum et calcis concretio generum amborum legibus fiat diversis. Madreporarum animalia autem haud sunt polypi sed Actiniae, quae vero etiam, sicut Milleporarum polypi, in lapideum suum sceletum extenduntur, eumque sine dubio simili ratione, ac polypi Milleporarum, excernunt.

Quaeritur porro, num forsitan de *propagatione et incremento Gorgoniarum et Corallii* observationes promulgatae sint, e quibus appareat, *truncum e cortice oriri*? Donatius refert evolutionem ovorum Corallii tam clare, ut praesumere debeamus, eum hanc evolutionem vidisse. Ovum nempe, postquam loco aliquo in mari se fixit, basi extenditur simulque altitudine crescit, ut speciem cellulae polypiferae Corallii habeat, tandem apice aperitur, polypusque apparet; hoc animalculum, altitudine circiter  $1 \frac{1}{2}$  linearum, jam duritiem Corallii induebat. Cavolinio, postquam saepius, sed frustra, operam dederat ut evolutionem ovorum Gorgoniarum videret, tandem successit observatio hujus evolutionis, quae eodem fere modo fiebat ac evolutio ovorum Corallii a Donatio relata. Cavolinus talium recens natorum polyporum circiter quinquaginta ante oculos habebat, addit autem expresse, se, paullo post, polyporum magnitudine aliquantum auctorum dissectione, nullum rudimentum trunci solidioris apprehendere potuisse.

Ratione habita illorum, quae praecedentibus conscripta sunt, apparet, inter truncum et corticem Gorgoniarum

ejusmodi nondum detectum esse nexum, e quo necesse colligendum sit, unum ex altero oriri debere; fieri ergo potest, ut unus gaudeat natura animali, alter natura vegetabili. Animalitas corticis nullo dubio obnoxia est; de ortu animali trunci argumenta sufficientia haud exstant. Confiteor, me, ex quo tempore cognitionem intimiorem Gorgoniarum (quatenus hoc in collectionibus licet) nactus sum, opinionem de natura vegetabili trunci nunquam radicitus e mente evellere potuisse. Forma arborea trunci, ad radicem semper crassioris, apicem versus sensim tenuioris et ramosi; radix, radici fucorum simillima, corpora firmiora obducens, praeterque truncum principalem, e medio ejus exurgentem, haud raro novos surculos emittens, cujus exemplar elegans, individuo egregio Gorgoniae flabelli, ante oculos habeo; trunci substantia, quae, plurimis speciebus, fucis solidiori exacte respondet, in Gorgonia placomus autem ipsam lignosam indolem induisse videtur; strata concentrica trunci; haec omnia vegetabilis exhibent imaginem adeo veram ut vel invito me animo meo se obtrudat. Sed in ipsis auctorum scriptis, qui truncum e cortice animali oriri putant, facta nonnulla narrata sunt, quae magis naturam trunci vegetabilem quam animale demonstrare videntur, scilicet: 1. Trunco aut ramo firmiori Gorgoniae transverse percisso, apparet *contextus fibrarum longitudinalium, cylindricarum, concentricè ordinatarum, dense positarum arcuteque inter se junctarum*. Jam alii naturae scrutatores has fibras cum ligno compa-



raverunt; Schweiggerus structuram internam Gorgoniarum structurae arboris dicotyledoneae similem invenit; aliique agnoverunt, basin (truncum et radicem) plurimorum coralliorum structura vegetabili gaudere. Si in horum corporum truncis canales longitudinales conspicui essent, naturae eorum vegetabilis eo luculentius se proderet; fugit me, an hoc respectu Gorgoniae statu recenti et vivo jam satis accurate examinatae sint. Radice crassiori Gorgoniae placomus et flabelli transverse scissa, distinctissime video non solum structuram ejus lignosam lamelloso-fibrosam, sed etiam copiam magnam pororum minorum; quaeritur ergo, nonne hi pori diametri vasorum radicalium insurgentium esse possint? Plurimarum Gorgoniarum rami aut trunci teneriores decorticati, lumine translucente colorem et semipeluciditatem fidis violinae habent; distinctissime autem in eis axem conspicio obscuriorem, quae, ubi ramus in duos ramos abit aut ramulum teneriorem protrudit, finditur et in utrumque ramum continuatur; nonne haec axis canali medullari plantarum responderet? Gorgoniarum musei nostri plures in superficie lapidum aut concharum radican- tur; radix autem exhibet stratum dilatatum fibrarum longitudinalium arctissime junctarum, quae omnes in truncum, e centro strati exurgentem, concurrunt; stratum ipsum pertenuis esse solet. Compages simillima concursusque fibrarum in radice fuci quoque conspicitur, cujus exemplar nitidum, in lapide cretum, coram habeo. 2. Cum *cortex animalis* coralliorum huc pertinentium a *basi*



*extremitates versus mori feratur, et, quod inde sequitur, locis a radice remotioribus functiones suas longius exerceat, haud eruere possum, unde fiat, truncos basin versus fortiores et crassiores esse quam apicem versus, si e cortice polypifero ortum ducere deberent; facillime autem haec res explicatur, si incrementum vegetabile truncorum admittimus. 3. Porro, si verum est, *cellulas polypiferas corallii rubri aliquantulum in truncum lapideum penetrare, impressiones autem eo effectas radicem versus obsoletiores esse*, hoc quoque, trunci ortu e polypis posito, difficultatibus in explicando laborat, nam illis locis, ubi polypi demortui essent, radicem nempe versus, impressiones polyporum ultimo demortuorum aequae distinctas esse oportet ac in superficie ramorum juniorum, haud enim excretionibus polyporum repleti et deplanari potuissent, cum illis locis polypos demortuos nulli recens nati secuti sint; posito autem incremento interno vegetabili trunci, impressiones illae ipso incremento oblitteratae esse possunt, uti foramina in arborem terebrata. Aegre quidem incrementum verum internum trunci lapidei densi, duritiae marmoris, explicari potest; Schweiggerus attamen de Cellaria cerroide narrat, ex ejus articulis, jam majore calcis copia scatentibus, novos tubulos pullulare, quod etiam in regno vegetabili in corallinis animadverti posse. 4. Non solum *plantae quaedam trunco Gorgoniarum, quoad substantiam, similes sunt, e. g. Fuci, sed quaedam etiam calcem in vasis gignunt et deponunt, vel totae ipsae in calcem convertuntur.**

Plures naturae scrutatores demonstraverunt, corallinas prima aetate esse plantas molles, postea in massam calcaream se convertentes. Simili modo, secundum Schweiggerum, Ulva squamosa calce opprimitur et in Milleporam coriaceam commutatur. Charae quoque, quarum analysim chemicam accuratissimam nuperrime Buchnerus (1) satis effuse exhibuit, partim lapidescunt, secundum Martium (2); e Schweiggeri observatione partes inferiores Charae hispidae adeo fiunt calcareae et fragiles ut, aeque ac corallia, a basi versus extremitates, hac calcis accumulatione mori videantur. Quo autem comparisonem instituere possem cum eis, quae antea de structura interna Corallii et Gorgoniarum dixi, scire mallem, num etiam in corallinis charisque, calce jam oppressis, vestigia vasorum conspici possint. 5. In *sertulariis* Cavolinius observavit, primo truncum simplicem tubuliformem nasci, medulla animali impletum, deinde ex hac medulla, postquam apice tubuli sub forma noduli prorupisset, polypum evolvi. Tubulus vero haud e medulla animali excernitur, sed per se crescit, nam sertulariis modo evolvi aut reproduci incipientibus, tubuli haud per totam longitudinem medulla impleti, sed apicem versus vacui sunt. Schweiggerus etiam credit, *radicem repentem multifidam nutrimentum insugere*; eandemque opinionem Cavolini de Sertularia parasitica fovet, quae, ex ejus observationibus,

---

(1) Verhandlungen der Leop. Carol. Akad. d. Naturf. IX p. 353 sq.

(2) Ibidem p. 183 sq.

semper perit si a *Sertularia racemosa*, cui increscit, et de  
ejus succis nutrimentum haurire videtur, cum haec tunc  
valde debilis et languida sit, disjungitur. Observatum porro  
est, *Sertularias* eo quoque pluribus plantis perennibus si-  
miles esse, quod ab apice basin versus moriantur, simul-  
que e radice novos surculos protrudant, quod, moerente  
*Schweiggero*, functionem hujus partis, succos insugendi,  
luculenter probat; itidem ex ejusdem viri doctissimi obser-  
vatione, quaedam *Cellariarum* species radicibus veris, vel  
libere in aquam exeuntibus, vel in fundo reptantibus, in-  
structae sunt, ad insugendam aquam inservientibus; et ex-  
perientia de sertulariis, quae, sicut plures plantae, inverti  
possunt, ita ut radix in truncum cum ramulis, hi autem  
in radices commutentur, magni sane est momenti. Si autem  
his corporibus nutritio conceditur vegetabilis ope radice,  
quaeritur, nonne eadem etiam concedi posset *Gorgoniis*,  
quae illis, quoad substantiam, saepe peraffines sunt? Li-  
cet enim de *Gorgoniis* nullibi mentionem inveniam factam  
esse canalibus, per trunci axem currentis et liquore se mo-  
vente repleti, qualis in sertulariis conspicitur, attamen axis  
illa obscurior ramorum teneriorum *Gorgoniae*, de qua su-  
pra locutus sum, vas analogum esse posset, species tubuli  
medullaris, qui autem haud, sicut in sertulariis, cum po-  
lypys communicaret, neque ergo naturae animalis esset, sed  
potius canali medullari plantarum respondere videretur. Ca-  
eterum autem affinitas, quae, motu interno fluidi, sertularias

inter et Charas extat, memorabilis est. Treviranus (1) videbat in utriculis Charae flexilis motum ascensorium et descensorium substantiae granulosae; adhuc notatu digniores sunt motus illi, qui in Chara vulgari Cortio (2) et Ehrenbergio (3) se offerebant; hic etiam in quibusdam mucorum speciebus motum similem animadvertibat, et speciatim de Syzygite commemorat, tali motu omnia granula apicem filamentorum versus ascendere et in sporangia se conferre. Haec omnia ducunt in analogias memorabiles harum plantarum uno latere cum sertulariis, altero cum confervis, quo tractatum Martii jam allegatum conferre necesse est. Num etiam in axe Gorgoniarum motus similis locum habeat, non nisi observationibus in individuis recentibus vivis, instituendis decidi potest; allegentur veruntamen haec Linnei verba: » Gorgoniae manifesta metamorphosi e vegetabili in animale mutantur. Planta enim radicata more » Fuci excrecit in caulem ramosum, cortice indutum deponente librum indurandum in lignum secundum annulos concentricos, intra quos medulla animata, quae prodit in animalcula florida, sponte se claudentia, aperientia, moventia, sentientia etc. ». Observationem Cavolinii, e radice superstitute Sertulariarum destructarum novos truncos enasci, Schweiggerus arripit ad demonstrandum,

---

(1) Weber Beitrage zur Naturkunde II. p. 126 sq.

(2) V. Martini loco jam supra allegato p. 192.

(3) Verhandlungen der Gesellsch. zu Berlin I. 2 p. 103.

radici etiam functionem succos insugendi tribuendam esse; cum vero etiam quibusdam nostri musei individuís Gorgoniarum et Corallii tales surculos e radice exsurgere videam (trunco principali veruntamen incolumi), his quoque nisum formativum per radicem, ergo etiam incrementum vegetabile, tribuere licebit.

Cum autem nec in scriptis naturae scrutatorum, nec in Corallio et Gorgoniis ipsis, quas coram habeo, aliquid offendere possim, quod opinioni de natura et incremento vegetabili trunci horum corporum obsit, sed potius plura, quae eam confirmant, superest adhuc inquirere, *num cortex polypiferus animalis gignatur simul cum trunco vegetabili et ex eo? numve extrinsecus eum obducat?* Primum illud ex evolutione ovorum germine praedictorum gemino, vegetabili et animali, demonstrari posset, qualia Basterus et Linnæus in Corallio praesumebant, qualia quoque Cavolinius Sertulariis addixit, cum, ex ejus sententia, ovi Sertulariae parasiticae tegumentum exterius in tubulum abeat, interiora autem in polypum evolvantur. Pariter etiam explicari potest evolutio Adeonae foliiferae, quam Schweiggerus egregie delineavit et aere incidi curavit. Si aliquis in Gorgoniis canales tenuiores demonstrare posset, ab axe lateraliter superficiem versus in singulas cellulas polypiferas ducentes, haud incongruum esset, Gorgoniis similem evolutionem similemque relationem inter truncum et polypos, ac in sertulariis, addicere, et ortum earum ex ovo semianimali et semivegetabili derivare. Cum autem opinio, axem trunci



Gorgoniarum substantiam includere idoneam, quae polypos esse gignere posset, illamque substantiam cum polypis, canali intermedio, connexam esse, nuda esset hypothesis, nulla observatione nulloque argumento nixa, superest tantum ut admittamus, *polypos Gorgoniarum extrinsecus in truncum vegetabiliter ortum et crescentem se deposuisse*. Hacc sententia truncis illis, cortice polyporum diversorum indutis, quorum in introitu hujus tractatus mentionem feci, irrefutabiliter, ut opinor, comprobatur. Quo autem omnia de hac re dubia removeantur, examen accuratius quaestionum insequentium optarem: 1. *Num observatum sit cortices unius ejusdemque polyporum speciei in truncis diversarum specierum, vel in corporibus plane alienis inveniri?* Jam vidimus, cortices diversos unum eundemque truncum induere; nec dubito, quin in collectionibus Gorgoniarum majoribus plura hujusmodi exempla occurrant. In nostro museo, quod nequidem copia magna horum corporum gaudet, nonnullis individuis quaestio illa probari posse videtur: est inter alios nempe truncus parvus, cum trunco compresso Gorgoniae palmae congruens, prorsus fere decorticatus, summis ramorum extremitatibus solis indutus cortice, qui omnibus notis, tam a forma et situ cellularum quam a colore desumptis, cortici Gorgoniae flabelli respondet. Omnibus autem Gorgoniae flabelli exemplaribus, quae coram habeo, cortex flavus interiora versus rubro tinctus est, (radice autem passim color flavus rubro prorsus cecit); idem est conspicuum in trunco illo parvo.



Trunci Gorgoniae furfuraceae et sasappo omnibus notis inter se congruunt; trunci quoque Gorgoniae verrucosae et miniaccae unius speciei esse videntur. In corporibus alienis autem, quae haud Gorgoniae sunt, corticem polypiferum hujus generis non invenio; in illis truncis ipsis, quorum radices dilatatae totae cortice polypifero obductae sunt, hic nunquam ultra radicem, in lapidem conchamve, abit, supra quam radix se extendit. Quibusdam radix tota decorticata, aliis cortice ubique aut pro parte induta est; plurimis hic cortex in radice caret cellulis, quod ita se habet in ipso Gorgoniae verrucosae exemplari egregio musei nostri, cujus truncum, ad radicem usque, cellulae integerrimae confertissime occupant. Cavolinus etiam testatur, radici Gorgoniae verrucosae cellulas pauciores quam trunco esse. Inter omnes musei nostri Gorgonias unicum solummodo, idque peraltum, Gorgoniae palmae exemplar est, cujus etiam cortex radicalis cellulis integris instructus est. Balani autem aliaque conchylia, haud raro trunco et ramis Gorgoniarum adnata, saepius strato tenui substantiae corneae trunci involvuntur, quod, haud parcius trunco ipso, cortice cellulisque polypiferis vestitum esse solet. Alii forsan contenderent, stratum illud corneum a cortice polypifero excretum esse, cum corpus, cortici cujusvis plantae arborisve adhaerens, nunquam hujus cortice involvatur; ego autem factum illud his explicare posse videor: sicut nempe rami aliarum plantarum, in fundo terreno crescentium et radicaantium, cum vel in terram deflectuntur, vel per vas terra repletum

ducuntur, in hac terra radices protrudunt, ita etiam truncus et rami Gorgoniae, si cum talibus corporibus, in quibus crescere solent, nexu junguntur arctiore et solidiore, in haec corpora radices emittunt. Cum autem conchylia quoque talia sint corpora, Gorgoniarum rami haud deerunt, quin radices emittant, simulac cum eis in contactum veniunt intimiorem, id quod fit si conchylia Gorgoniis adnascuntur. His apparet, stratum illud substantiae trunci Gorgoniarum in balanis et conchyliis radici respondere, cum etiam radix vera et originaria non nisi stratum simile tenue sit. Corallio rubro etiam saepius conchylia etc. adhaerent, quae mox strato tenui corallii obducuntur. Museum nostrum inter alia gaudet trunco corallii, cujus ramorum unus cylindro crasso Celleporae cujusdam ita circumdatus est ut haec Celleporae massa ipsa strato tenui substantiae corallii, striis longitudinalibus distinctissimis, obducta sit, quod autem admittit explicationem cum illis, quae modo de Gorgoniis dixi. Institutantur experientiae, si vis surculis ligneis ramosis, in fundo maris, ubi Gorgoniae crescunt, infigendis, quibus exploraretur, num quoque hi sureuli cortice polypifero incrustentur. Cavolinus fragmento cylindrico corticis polypiferi Gorgoniae verrucosae, a trunco artificiose dissoluto, bacillum ligneum, cavo cylindri respondens, immiserat, hocque praeparatum in mari suspenderat; hebdomadibus tribus praeterlapsis polypi adhuc vivebant; cylindrus animalis quidem locis dissolutione vulneratis cicatrices duxerat, nullo modo autem cum ligno se conjunxerat. Auctor haud memorat, corticem hunc aliquid secernisse

substantiae trunci Gorgoniae respondens. 2. Quaeritur, *num polypi Gorgoniarum etiam per se, absque trunco aliave basi solidiore, vivere et constare possint?* Inter experientias plures, a Cavolinio de vi reproductiva Gorgoniae verrucosae institutas, una est quae demonstrat, corticem ejus polypiferum vivere et crescere posse, trunco interno ipso penitus exstirpato. Tales corticis cylindri, in mari suspensi, vivebant adhuc post dies decem, sed functiones vitales erant debiliores; cavum internum cylindri quidem massa quadam se impleverat, sed trunci regenerati vestigium nullum deprehendi poterat. Magni fuisset momenti, si observator laudatissimus experiri potuisset, quamdiu polypi hac conditione vixissent et crevissent, numque forsan serius axem solidiorem ex se produxissent. 3. Porro quaeritur, *num trunci Gorgoniarum, in mari vel cortice toto, vel parte corticis privati, occurrant, numque observationes extent de earum in hac conditione incremento?* Museum nostrum exhibet tam magnas fortesque quam parvas debilesque Gorgonias, quarum aliae toto trunco radiceque, aliae solis extremitatibus ramorum, aliae non nisi supra radicem, aliae interruptae locis pluribus trunci, cortice polypifero incrustatae sunt, quaedam autem omni cortice carent. Cavolinus asserit, partem infimam trunci corallii rubri in mari haud raro cortice carere, superiorem autem nihilo minus prospere vegetare. Schweiggero contra corallii piscatores narrabant, se corallium et Gorgoniam verrucosam quovis tempore cortice spongioso vestita invenire. Quoad plurimos Gorgoniarum truncos nostri musci, quibusdam

locis cortice denudatos, addere quidem me oportet, e superficie scabra marginis corticis, ubi hic locis denudatis interruptitur, colligendum esse, hunc defectum siue dubio post mortem polyporum, detritu et conquassatione corticis, jam in crustam calcaream concreti, ortum esse; sunt vero etiam exemplaria, quibus margines crustae aequae laeves ac reliquae crustae superficies, truncoque aequae arcte adplicati sunt ac reliquae partes crustae, unde opinor, horum exemplarium locos denudatos jam illis viventibus, corticeque adhuc molli, extitisse. Evidenter quoque isti *Gorgoniae verrucosae* trunci, locis quibusdam cortice rubro *Gorgoniae coralloidis* vestiti, quorum in introitu hujus tractatus mentio facta est, jam in fundo natali locis illis denudati fuisse debent. Cum autem nullo omnium horum exemplarium individuo videam, locos denudatos debiliores aut tenuiores esse locis vestitis trunci, quaero, num jam *Gorgoniis*, loco natali crescentibus et degentibus, tales institutae sint observationes, quales hanc rem dilucidare possent, simulque naturae scrutatores, in vicinia litorum opportunorum habitantes, invito, ut experientias instituant ad decidendum, num *Gorgoniae*, cortice toto vel corticis parte privatae, longius crescant, numve partes denudatae crassitie augescere desinant, indutae autem interea crassiores fiant? *Cavolinius* ramos duarum *Gorgoniarum*, passim cortice privatos, locis denudatis ligamento junxerat; rami autem locis colligatis concreti erant. 4. *Cavolinius* experientia probavit, partes singulas denudatas trunci *Gorgoniae verrucosae* denuo indui, cortice polypifero, marginibus sensim pro-

longatis, supra locum denudatum se extendente; sed experiendum foret, *num trunci penitus denudati in mari denuo cortice polypifero vestiantur*, quod certo mihi fieri posse videtur, cum trunci jamjam descripti Gorgoniae verrucosae, passim cortice Gorgoniae coralloidis vestiti, saltem probent, locos singulos denudatos polypis extrinsecus adpulsis denuo vestiri posse. 5. Tandem scire vellem, *num revera jam observatum sit, truncum Gorgoniae cujusdam cum suo cortice ex uno ovo se evolvisse*. Observationes Cavolinii, supra jam allegatae, haud sufficiunt ad veritatem hujus evolutionis stabiliendam. Operae etiam pretium facerent qui observationes, quas Donatius de evolutione ovi Corallii rubri enarrat, repetere vellent.

Haud sane dubium est quin institutione observationum et experientiarum modo propositarum natura horum corporum clarior reddi deberet. Si quaestiones quatuor priores probarentur, opinio mea nullo successu aggredi posset. His quoque, qui forsitan evolutionem polyporum e trunco defenderent, confirmatio quaestionis quartae auxilio foret, sub ea attamen conditione ut simul contrarium quaestionis primae et secundae probaretur. Si quaestiones tres primae haud probari possent, inde attamen nondum certitudine irrefutabili colligendum foret, truncum e cortice, vel hunc ex illo, oriri, sed id tantum, unum haud sine altero existere et provenire posse; fieri enim posset ut polypi e trunco nutrimentum quoddam sumerent, sicut, Cavolinio teste, Sertularia parasitica e succo Sertulariae racemosae, in qua crescit, nutrimentum haurire videtur; sicut porro



Viscum album, multique lichenes et musci, non nisi in arboribus certis inveniuntur. Si pars secunda quaestionis tertiae negaretur, poni etiam posset, Gorgoniarum truncos, ut proveniant et crescant, involucro polyporum egere tinenti, forsanique vel nutrienti, qua conditione autem requireretur, polypos eorumve ovula jam truncis tenerrimis Gorgoniarum se adhaerere. Donatius et Cavolinus asserunt, corallium rubrum, in mari cortice privatum, vermibus parvis destructivis aggredi et perforari. Si autem quaestio quinta probaretur, plane nescirem, quomodo talem evolutionem cum mea opinione, et specialiter cum coexistentia diversorum corticum polypiferorum in uno eodemque trunco, conciliarem.

Hic ergo naturae scrutatoribus, inprimis illis, qui litora coralliis abundantia habitant, campus patet latus observationum et experientiarum. Multas adhuc quaestiones decidendas proponere possem, quae autem e pluribus hujus tractatus locis sponte emergunt; unam adhuc promere mihi liceat. *Quibus conditionibus Corallii rubri aliorumque coralliorum ramuli defracti crescere pergant?* num radix reproducat sustentoria; et quomodo hic fiat? Donatius et Cavolinus narrant, ramos Corallii rubri, ex longo tempore in mari jacentes, defractos et a radice sua avulsos, crescere et propagari. Neuter horum auctorum quidem conditionis radicis mentionem fecit, Cavolinus veruntamen Gorgoniam observavit; quae, postquam eam avulserat et loco ejus natali in mari filo readligaverat, post aliquot dies non solum aequè jucunde vigebat et vivebat, ac si nil ei accidisset, sed etiam corticem animale basi prolongaverat.



## DESCRIZIONE

## DI UNA PARTICOLARE BATTERIA VOLTIANA

DEL DOTTOR VITTORIO MICHELOTTI

PROFESSORE DI CHIMICA MEDICA, E FARMACEUTICA.

*Letta nell' Adunanza delli 9 dicembre 1821.*


---

Nell'adunanza dei 24 giugno ho presentato a questa Reale Accademia, un particolar apparato Voltiano, mediante il quale eransi già da me fatti varj sperimenti con alcuni de' membri di questa Reale Società. Le molte cose delle quali dovette occuparsi in quell'adunanza la Classe, mi costrinsero a spiegarne soltanto verbalmente la costruzione e gli usi. Intanto nella Biblioteca universale di Ginevra del mese di luglio (1) comparve uno scritto del sig. Van Becck il quale fra le altre cose interessanti, contiene la descrizione di una consimile costruzione Voltiana fatta dal sig. W. Offerhaus; osservando però che i priucipj, che mi guidarono a tal genere di costruzione, non sono esposti da questo autore, e che le ricerche che io feci dappoi,

---

(1) Bibliothèque universelle, juillet tom. 17 pag. 195.

finora non sono pubblicate, penso di poter ancora presentare questo mio lavoro alla dotta Società; cioè l'apparato tal quale lo costrussi e lo presentai all'Accademia in dett' adunanza; ed in altro scritto esporrò le ricerche che feci relativamente all'incominciato argomento.

Le più potenti combinazioni Voltaiche che attualmente adoprano i fisici ed i chimici, pajono particolari modificazioni dell'apparato a corona di tazze del celebre Volta. In fatti queste differiscono dalla pila ordinaria in ciò che ai panni o cartoni inzuppati di soluzione salina, si sostituisce fra le coppie, un liquido; ma non differiscono dallo apparato a tazze, se non che, in quelle le dimensioni delle superficie metalliche, relativamente alla quantità del liquido, sono di molto più grandi; in modo che a parer mio, può dirsi, che collocando nelle tazze lastre di grande superficie, si hanno le attuali potenti batterie.

Nella batteria di Cruickshanks, che è la prima di questo genere, s' accoppiano entro una cassetta le piastre di zinco e rame, in modo che i metalli messi in azione col liquido eccitatore presentano fra loro ed il liquido egual superficie; in quest'apparato non è attiva dal canto del liquido eccitatore, se non se una metà della totale superficie metallica; riunisce però l'utilità di non lasciar corrodere che la metà della superficie metallica, alla facilità di metterlo in azione.

La libera immersione delle piastre in cellule separate non produce dal canto dell'effetto fisico varietà importante,

poichè non presenta, come nel primo, che la metà delle superficie metalliche in vera azione, mentrechè l'altra metà pare corrosa inutilmente.

Finalmente la batteria *Galvanica-Elementare* del Dottore Wollaston, pare essere ciò che immaginato siasi di più semplice, e di più conforme ai principii ed alla sperienza per ottenere al massimo grado, uno degli effetti dell'elettromotore. In fatti considerando quest'insigne autore, che l'ignizione dei fili metallici è un segno indicante eminentemente la quantità d'elettricità, che si sviluppa dalla reazione delle piastre metalliche col liquido eccitante (1) cercò il modo più semplice di porre in azione col rame, e sotto il minor volume, tutta la superficie del zinco; indotto a ciò, dall'aver conosciuto, che ciascuna delle due superficie zinco, deve avere in faccia la sua corrispondente in rame o in altro metallo (meno ossidabile del zinco); poichè allorquando il rame non è opposto che ad una sola superficie del zinco, l'azione dell'altra si consuma quasi inutilmente. Ciò lo mosse a costruire la sua celebre batteria elementare, che possiamo dire microscopica, relativamente alle altre.

In questa tutta la faccia interna di una lastretta d'argento

---

(1) NB. Ho creduto di poter esporre la cosa così, tuttavia il testo è il seguente: *L'ignition des fils métalliques étant un indice éminemment instructif de la quantité considérable d'électricité qui se dégage pendant la dissolution des métaux, j'ai entrepris etc. Voyez Bib. Universelle, vol. 1, pag. 119.*

piegata in anello, corrisponde all'esterna di una lastretta di zinco, similmente piegata in anello concentrico al primo: tuttavia in quest'ingegnoso apparato, tanto la faccia esterna della lastretta d'argento, che l'interna del zinco, non sono in azione, o per valermi delle parole dell'autore parlando degli altri apparati, sarebbero consumate senza utilità veruna. Paragonando poi questo apparatino cogli altri, esso presenta di già sotto minor volume una molto maggiore superficie in azione.

Partendo dalli stessi principj fruttuosissimo riuscì il suggerimento che il D. Wollaston diede al sig. Children allorchè questo costruì per la prima volta nell' 1813 la sua gigantesca batteria (1). Egli aveva collocato in ciascun compartimento, una lastra di rame per caduna di zinco, e l'effetto non corrispondeva guari alle sue speranze: l'addizione di una nuova lastra di rame per ciascun compartimento, e fatta in modo che le faccie del zinco corrispondessero alle due di rame, aumentò moltissimo la sua efficacia; che anzi dalle ricerche fatte dal sig. Children con picciolo apparato, l'aumentazione d'elettricità, che ne risulterebbe, sarebbe almeno del doppio.

Parmi che agli stessi principj dell'apparato elementare di Wollaston debbansi ascrivere li vantaggiosi risultamenti degli apparati, che presentemente si costruiscono, e nei

---

(1) *Annal. de chim. et de phys.* vol. 96, pag. 12.

quali una lastra di zinco è contenuta fra due faccie di rame di una sola lastra; ovvero s'immerge in cassetta di rame.

Tali riflessioni m'indussero a credere, che il miglior modo d'ottenere una grand'azione, con minor volume e dispendio, sarebbe stato quello, d'avvolgere lastre eguali in spirali concentriche, tenendole separate con pezzetti di sovero, come praticò Berzelius ed altri, in apparati di questo genere.

In fatti dal canto dell'economia, il rame ed il zinco laminati del commercio servono eccellentemente; e semplici bicchieri, servono per cellule ad immersione. Dal canto dell'azione, in un bicchiere da 3 a 3 pollici e mezzo di diametro in fondo, e d'altezza di circa pollici 5 dispor si possono comodamente lastre della lunghezza di pollici 16 e d'altezza pollici 4 e mezzo, non immergendo le lastre se non di pollici 4, e deducendo da ciascuna circa pollici 5 da una delle faccie, la quale resta inattiva, si ha una superficie in azione di pollici 108 quadrati per ciascheduna, e di pollici 216 per ciascun elemento.

I primi tentativi che si fecero ai 6, 7, 17, 18 giugno, in occasione che si ripetevano con alcuni de' Membri di questa Società ed altri distinti personaggi, (1) sperienze

---

(1) Il sig. Marchese Falletti di Barolo; i Professori Vassalli-Eandi, e Carena; il sig. Accad. Giuseppe Grassi; ed il Professore Cossù di Sardegna ecc.

elettro-magnetiche , dimostrarono che , un solo di questi elementi era di già sufficiente a scaldare potentemente un filo di platino di  $\frac{1}{4}$  di mill. di diametro ; che esso attraeva potentemente la limatura di ferro , e quattro debitamente accoppiati producevano di già benissimo i fenomeni dell' ignizione , ed anche la fusione di detto filo di platino ; con dieci , dodici ecc. si fusero due pollici e più di detto filo , ed una sottile laminetta di ferro larga una linea ; armando poi convenientemente i conduttori con due punte di carbone si presentò la bellissima stella di fuoco e di luce , quale osservasi con batterie molto più dispendiose.

Varie modificazioni importanti feci nel seguito , le quali esporrò in altra lettura , unitamente ai risultati che ottenni dalle mie ricerche : intanto per quanto riguarda alla descrizione dell' apparato , credo più spedito e chiaro d' inviare alla figura , ed alle sue annotazioni.



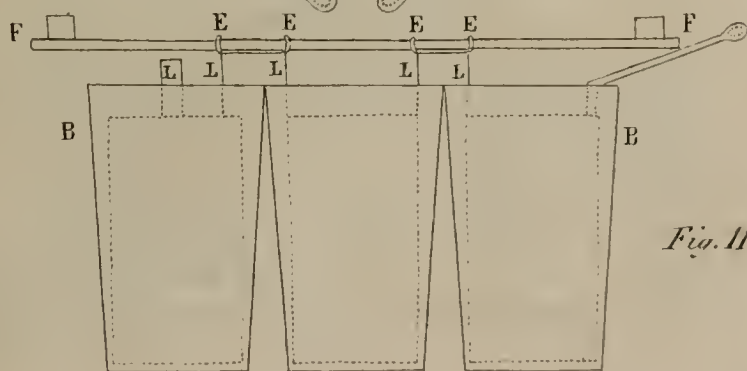
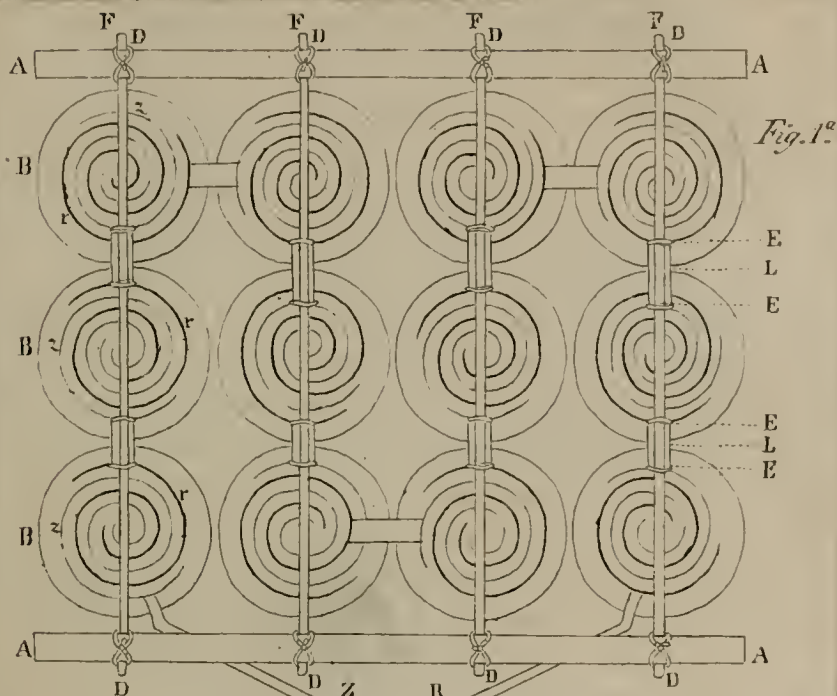




FIG. I.<sup>a</sup>

Piano orizzontale di una batteria di dodeci elementi.

*B B B* Bicchieri entro i quali si collocano gli elementi.

*r* } Lastre di rame e di zinco piegate in spirali concentriche.  
*z* }

*L L* Laminette di rame conduttrici, saldate da un'estremità, alla lastra di rame di un elemento, e dall'altra a quella di zinco del successivo.

*R Z* Lastre di rame conduttrici dei due poli. Le loro estremità terminano in picciolo scodellino atto a ricevere una goccia di mercurio.

Nota. Il polo positivo è dal canto del conduttore *R*.

cioè dell'ultima lastra di rame.

*F F, F F* Quattro cilindri di vetro, corrispondenti alle quattro serie degli elementi.

*E E, E E* Punti ne' quali legate sono le laminette conduttrici ai cilindri di vetro.

*AA, A A* Pezzi di legno al quale sono legati i cilindri di vetro nei punti *D D D D*.

Nota. L'apparato si prende per il telaio di legno per abbassarlo, od alzarlo perpendicolarmente, secondo che si vogliono immergere gli elementi nei bicchieri pieni d'acqua acidulata, o che per lavarli trasportar si vogliono in tinnozza piena d'acqua semplice.

FIG. II.<sup>a</sup> Veduta laterale e verticale dell'apparato.

## MÉMOIRE

SUR LA MANIÈRE DE RAMENER LES COMPOSÉS ORGANIQUES  
AUX LOIS ORDINAIRES DES PROPORTIONS DÉTERMINÉES

PAR LE CHEVALIER AVOGADRO.

*Lu à la Séance du 9 décembre 1821.*

---

J'ai annoncé dans mon mémoire *sur les masses des molécules des corps* lu le 14 février 1821, qu'en considérant les composés organiques, comme formés de la combinaison successive de leurs divers élémens, avec l'un de ces élémens pris pour base, on pouvait assujettir ces combinaisons successives aux lois ordinaires des combinaisons binaires, et les ramener, par des artifices semblables à ceux que nous avons employés pour les autres combinaisons, à la forme des *combinaisons multiples*, c'est-à-dire de celles où l'un des élémens entre par un nombre de molécules multiple de celui de l'autre, de manière à faire disparaître par là la complication particulière que M. Berzelius avait admis dans ses combinaisons, et par laquelle il avait cru devoir les soustraire aux lois des composés inorganiques.

Je me propose dans ce mémoire d'entrer dans quelque détail sur l'application de ce principe aux différens composés d'origine végétale et animale, et de m'acquitter ainsi,

de l'engagement que j'avais pris à cet égard dans le mémoire cité.

2. Les composés organiques dont les proportions des élémens sont connues, jusqu'ici, avec quelque précision, sont ou binaires, ou ternaires ou quaternaires, savoir formés ou de carbone, et d'hydrogène, ou de carbone, hydrogène et oxygène, ou enfin de ces trois élémens et d'azote.

La règle que j'ai donné dans mon mémoire précédent, et la formule par laquelle j'ai représenté cette règle (n.<sup>o</sup> 22), pour ramener les composés binaires à la théorie des combinaisons multiples est également applicable en général aux composés binaires organiques.

Pour en donner un exemple je choisirai le naphthe, substance dont M. Théodore de Saussure a donné une analyse soignée dans son *mémoire sur le naphthe d'Amiano*. Selon cette analyse elle est un composé binaire de carbone et d'hydrogène, dans la proportion de 3 volumes de vapeur de carbone (d'après notre évaluation de la densité de cette vapeur (1)) et de 5 de gaz hydrogène. Selon la règle

---

(1) C'est-à-dire en supposant que le gaz acide carbonique est composé d'un volume de vapeur de carbone, et deux volumes de gaz oxygène, avec redoublement par rapport au gaz de carbone. C'était aussi, comme je l'ai dit dans mon mémoire précédent, la supposition de M. Berzelius, et j'ai assigné les motifs qui rendent cette supposition très-probable. Je ne sais pourquoi dans le tableau annexé au mémoire où il expose les nouvelles déterminations des densités de quelques gaz qu'il a faites avec M. Dulong (Annales de chimie et de phys. décembre 1820), et dont je ne connaissais lors de la lecture de mon

indiquée, il faut d'après cela la supposer formée de

1 carbone 1 hydrogène

2 ( 1 carbone 2 hydrogène )

---

dernier mémoire, que celle relative au gaz hydrogène, d'après ce que M. Berzelius en avait dit dans son *essai sur la théorie des proportions chimiques* etc. M. Berzelius marque pour la densité du gaz de carbone la moitié seulement de celle qui résulterait, d'après cette supposition de sa nouvelle détermination de la densité du gaz acide carbonique, savoir 0,4214 en prenant pour unité la densité de l'air atmosphérique, et 0,38218 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, au lieu de 0,8428, et 0,76436, nombres qui seraient d'ailleurs peu différens de ceux qui résultaient de la densité du gaz acide carbonique selon Biot et Arago, dans la supposition indiquée, ce qui indiquerait qu'il a adopté la supposition de M. Gay-Lussac, que le gaz acide carbonique soit composé de volumes égaux de gaz de carbone, et de gaz oxygène. Je remarquerai encore à cette occasion que M. Berzelius a aussi donné une nouvelle détermination de la densité du gaz azote, savoir 0,976 en prenant pour unité celle de l'air atmosphérique, et 0,88518 en prenant pour unité celle du gaz oxygène, nombres aussi peu différens de ceux qui résultaient des expériences de Biot et Arago. Enfin il a donné encore dans le même mémoire une nouvelle détermination de la densité du gaz oxygène peu différente de celle de Biot et Arago, savoir 1,1026 en prenant pour unité celle de l'air. Quant à la densité du gaz hydrogène, pour laquelle j'avais indiquée dans mon mémoire la nouvelle détermination, qui est la plus importante, d'après ce que M. Berzelius en avait dit dans l'ouvrage cité, je remarque maintenant dans son mémoire, que la densité qui résulterait immédiatement de ses expériences, serait 0,0687 en prenant pour unité celle de l'air; mais M. Berzelius se fixe à 0,0688 d'après ces expériences sur la composition de l'eau, ce qui diffère fort-peu du résultat moyen auquel je m'étais arrêté. Au reste je ne fais ici ces remarques que pour compléter ce que j'en ait dit dans mon mémoire précédent : dans celui-ci je ne ferai aucun usage de ces petites différences dans les évaluations des densités des gaz élémentaires; je m'en rapporterai pour les volumes relatifs des composans aux calculs mêmes



c'est à dire qu'il faut la considérer comme résultant de la réunion d'une molécule ou volume de gaz de carbone préalablement uni avec un volume égal de gaz hydrogène, et de 2 molécules de carbone portées chacune à l'état de gaz oléfiant par un volume double de hydrogène, en sorte que la première molécule de carbone forme la base de toute la combinaison; tous les autres volumes ou molécules en étant des multiples.

Il est remarquable que selon les expériences de M. De-Saussure, le volume de la vapeur de naphte est égal au tiers de celui de la vapeur de carbone qui y entre, ou égal à un seul des trois volumes de carbone, en sorte que ce volume est égal à celui de la portion de substance que nous prenons pour base, comme dans quelques uns des composés binaires immédiatement multiples, qui n'ont point le redoublement ordinaire, et en particulier dans le gaz oléfiant lui même, qui forme partie de cette combinaison.

C'est probablement la complication de composition, jointe au défaut de redoublement de volume, qui augmentant la grosseur de la molécule, ou la densité de la vapeur de ce composé, fait qu'il reste liquide à la température ordinaire, quoique il contienne une quantité de gaz hydro-

---

des auteurs des analyses, qui ne sauraient guère s'écarter du vrai, quant aux nombres de ces volumes, d'autant plus qu'il serait difficile de décider, sans de longues discussions, si les données un peu différentes dont ils sont partis ont pu influer, et jusqu'à quel point elles ont pu influer sur ces résultats.

gène peu inférieure à celle du gaz oléfiant, par rapport au carbone. Sans cette circonstance il formerait peut-être un gaz permanent, comme le gaz oléfiant même, état dont il approche déjà par sa grande volatilité.

On peut conjecturer que toutes les huiles volatiles ont en général une composition analogue, savoir qu'elles sont toutes des composés d'hydrogène et de carbone, dans lesquels le volume de l'hydrogène est compris entre les nombres 1 et 2 à peu près, relativement à un volume de vapeur de carbone, et sans que l'oxygène soit essentiel à leur composition. C'est en effet ce qui paraît résulter des analyses de différentes huiles essentielles par Théodore de Saussure. Mais la complication de la composition, d'après le nombre relatif des molécules peut être plus ou moins grande, et c'est probablement de là que dépend le plus ou moins de volatilité ou de fixité, de fluidité ou de solidité qui forme la différence de ces huiles. Quelquesunes des plus concrètes pourraient néanmoins contenir en outre un peu d'oxygène, qui augmenterait la complication de leur composition, et par là la grosseur de leur molécule.

3. Mais nous en tenant ici aux huiles qui ne paraissent formées que de carbone et d'hydrogène, nous remarquerons qu'il pourrait y en avoir quelques unes, où le nombre relatif des molécules fût tel, qu'elles échappassent à l'application immédiate de la règle ou formule citée, pour les réduire à la théorie des combinaisons multiples. En effet d'après cette règle, pour assujettir à cette théorie un

composé binaire, dans lequel la proportion des élémens en volume soit de 1 volume de l'un et  $m + \frac{p}{q}$  volumes de l'autre, il faut concevoir la réunion de  $q-p$  molécules ou volumes d'un composé des mêmes élémens dans la proportion de 1 à  $m$ , et  $p$  molécules d'un composé dans la proportion de 1 à  $m + 1$ . Mais, comme je l'ai déjà remarqué dans mon mémoire précédent, ce procédé ne satisfait immédiatement à la condition exigée, qu'autant que  $q-p$  est multiple de  $p$  ou réciproquement, c'est-à-dire qu'autant qu'en supposant la fraction  $\frac{p}{q}$  déjà réduite à sa plus simple expression,  $q-p$ , ou  $p$  est égal à l'unité, ainsi que cela avait lieu pour l'oxide intermédiaire de fer, auquel j'ai particulièrement appliqué cette formule dans le n.º 22 de mon mémoire. Or il peut arriver que cette condition n'ait pas lieu dans les rapports de volumes plus compliqués que nous présentent les composés binaires organiques.

L'huile essentielle de térébenthine nous en offrira un exemple; je la choisis de préférence, parce que nous en avons des analyses faites avec soin par M. Théodore De-Saussure, et par M. Houtton-la-Billardiére, et parce que nous avons de plus une détermination de la densité de sa vapeur, par M. Gay-Lussac, qui paraît nous fournir le moyen de nous former une idée plus précise de la composition de cette huile, par sa comparaison avec les analyses.

Selon l'analyse de M. Houtton je trouve que le rapport en volume entre le carbone, et l'hydrogène dans la composition de cette huile approcherait beaucoup de celui de

1 à 1,6, en regardant comme accidentel l'azote qu'il y a trouvé en très-petite quantité. Selon celle de M. De-Saussure ce rapport serait à-peu-près de 1 à 1,5. D'un autre côté la densité de la vapeur de l'essence de térébenthine est selon M. Gay-Lussac 5,013 en prenant pour unité celle de l'air. D'après cette densité il faut admettre plus de cinq volumes, et moins de six volumes de gaz de carbone dans un seul volume de vapeur d'essence : car dans la première supposition, en calculant d'après la densité de la vapeur de carbone, dernièrement admise par M. Berzelius le carbone seul formerait la densité 4,214, et il faudrait admettre un trop grand nombre de volumes d'hydrogène pour arriver à la densité 5,013 ; dans la 2.<sup>e</sup> supposition le carbone seul ferait déjà une densité 5,0568, qui surpasse celle observée, et il n'y aurait plus de place pour l'hydrogène. Pour avoir un nombre de volumes entiers de vapeur de carbone il faut donc supposer un nombre double, ou quadruple de 5, plus un autre nombre entier, et admettre la duplication, ou la quadruplication de volume, dans la formation de la vapeur composée, relativement à un de ces volumes de vapeur de carbone, et je trouve qu'on approche de très-près de l'analyse de M. Houtton, en supposant 21 volumes de carbone et 34 volumes d'hydrogène, avec quadruplication du volume de la vapeur : en effet en calculant d'après les dernières évaluations des densités de la vapeur de carbone, et de gaz hydrogène selon Berzelius, on a alors pour la densité de la vapeur dont il s'agit

$\frac{0,8128 \cdot 21 + 0,0688 \cdot 34}{4} = 5,0095$ , résultat fort peu différent de celui de l'expérience, (1) et le rapport de 21 à 34, ou de 1 à  $1\frac{13}{11}$  entre les volumes du carbone, et de l'hydrogène

(1) On aurait donc ici un exemple de quadruplication ou de deux redoublemens relativement au volume de la portion de substance qui forme la base de toute la combinaison ; et il paraît qu'en général dans les combinaisons qui ne se réduisent à la forme multiple que par des suppositions de combinaisons préalables, il doit y avoir ou égalité de volume du gaz composé relativement à la portion de substance qui en forme la base, comme on l'a vu pour le naphite, ou redoublement, ou quadruplication relativement à cette même portion. Je crois devoir corriger d'après cela ce que j'ai dit dans mon mémoire précédent sur le volume probable du gaz deutocide de chlore relativement à celui du chlore ; ce gaz étant formé de 1 volume de gaz de chlore, et 1 1/2 volumes de gaz oxygène, ou de

1 chlore 1 oxygène,

1 chlore 2 oxygène ;

si l'on suppose le redoublement relativement au chlore dans l'un et l'autre des composés partiels, ou ce qui revient au même quadruplication dans le composé total relativement à un des deux volumes de chlore, qu'on peut prendre indifféremment pour base, le volume du gaz composé sera double du volume total du gaz chlore, conformément aux expériences de Davy et Gay-Lussac. Dans le mémoire cité j'avais cru possible que le volume de ce gaz fût égal à celui du gaz oxygène qui y entre, ou qu'il fût à celui du chlore comme 3 à 2, conformément aux expériences du Comte de Stadion, dont j'ai adopté le résultat relativement à la composition du gaz, et je l'avais expliqué en supposant que des deux molécules de chlore qui prennent l'une 1, l'autre 2 d'oxygène, l'une souffrait le redoublement, et non l'autre ; mais alors il faudrait ensuite supposer, que ces deux composés partiels se réunissent sans changement de volume, quoique l'un ait un volume double de l'autre, en sorte qu'il en résultât 3 volumes pour le composé total, ce qui n'a en sa faveur aucune analogie.



est aussi fort-peu différent de celui de 1 à 1,6 trouvé par l'analyse par M. Houtton.

Maintenant si nous supposons que telle est en effet la composition de l'essence de térébenthine, il est clair que notre règle générale ne suffit pas pour ramener ce composé à une combinaison multiple, car nous avons ici  $\frac{p}{q} = \frac{13}{21}$ , et par conséquent  $p = 13$ ,  $q - p = 21 - 13 = 8$ , nombres dont ni l'un ni l'autre n'est égal à l'unité. Mais je vais faire voir que dans ce cas, et dans tout autre de ce genre on pourra toujours parvenir à cette réduction en appliquant plusieurs fois successivement la règle indiquée.

Le rapport de 21 à 34 entre le carbone, et l'hydrogène qui a lieu dans notre cas, et que j'indiquerai pour abrégé par 21  $a$ , et 34  $b$  donne d'abord, comme je viens de dire 1  $a$ , et 1  $\frac{13}{21} b$ , ce qui selon la règle répond à 8 molécules de  $a$ , réunies chacune avec une molécule de  $b$ , et 13 molécules de  $a$  réunies chacune avec 2 molécules de  $b$ , ce que nous représenterons par

$$8 (1 a + 1 b)$$

$$18 (1 a + 2 b)$$

mais comme 13 n'est pas multiple de 8, il faut encore appliquer la même règle aux deux composés que ces coefficients affectent: or 8 à 13 comme 1 à 1  $\frac{5}{8}$ , il faut donc prendre 3 molécules du premier de ces composés, réunies chacune avec une molécule du second, et 5 molécules du premier réunies chacune avec 2 molécules du second, ce qui donne la composition représentée par cette formule



$$3 [(1a + 1b) + (1a + 2b)]$$

$$5 [(1a + 1b) + 2(1a + 2b)]$$

comme 5 n'est pas encore multiple de 2, et que 3 à 5 comme 1 à  $1\frac{2}{3}$ , il faut encore, toujours par la même règle, prendre une molécule du premier des deux derniers composés avec une molécule du second, et 2 molécules du premier réunies chacune avec 2 molécules du second. Ainsi la composition devient enfin

$$1 [1 \{ (a+b) + (a+2b) \} + 1 \{ (a+b) + 2(a+2b) \}]$$

$$2 [1 \{ (a+b) + (a+2b) \} + 2 \{ (a+b) + 2(a+2b) \}];$$

en sommant tous les  $a$ , et tous le  $b$ , il est facile de voir que cette formule donne 21  $a$  et 34  $b$ , comme cela est exigé, et la première molécule de  $a$  peut être considérée comme la base de toute la combinaison qui devient multiple par rapport à elle.

Par un procédé analogue on pourra donc réduire toutes les combinaisons binaires que peuvent nous offrir les substances organiques à la théorie des combinaisons multiples, quelque compliqué que soit le rapport entre leurs nombres de molécules.

4 Passons aux composés ternaires organiques, composés de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, tels que sont la plupart de ceux d'origine végétale.

Il y a d'abord quelques uns de ces composés qui ne présentent aucune difficulté sous le point de vue, sous lequel nous les considérons ici; ce sont ceux où deux des élémens entrent pour un nombre de molécules, ou de

volumes immédiatement multiple de celui du 3.<sup>e</sup> élément. Tels sont entre autres l'alcool, et l'éther. Il ne sera pas inutile cependant d'entrer dans quelque discussion sur la manière la plus convenable de se représenter leur composition.

Les expériences, et les remarques de M. Gay-Lussac, a la suite de celles de M. De-Saussure paraissent avoir mis hors de doute que l'alcool absolu est composé de carbone, d'oxygène, et d'hydrogène dans une telle proportion, qu'il en résulterait un volume de gaz oléfiant, et un volume de vapeur d'eau, et que son volume à l'état de vapeur est égal à un de ces volumes. Cette composition réduite à ses premiers élémens revient selon notre évaluation de la densité du gaz de carbone à un volume de vapeur de carbone, 3 volumes d'hydrogène, et  $\frac{1}{2}$  volume d'oxygène, ou autrement à un volume d'oxygène 2 de carbone, et 6 d'hydrogène; et le volume du composé, à l'état de vapeur, est égal à celui de la vapeur de carbone, ou double de celui de l'oxygène, qui est l'élément qui y entre pour un seul volume, en sorte que le redoublement a lieu ici, selon la règle ordinaire des combinaisons binaires relativement à cet élément.

Mais doit-on considérer ce corps comme formé ainsi immédiatement de ces trois élémens, ou bien comme formé en effet de gaz oléfiant et d'eau? Voici quelques considérations qui paraissent s'opposer à cette dernière manière d'envisager ce composé.

1.° On ne peut pas former de l'alcool par la combinaison immédiate de gaz oléfiant et de l'eau.

2.° L'alcool a des propriétés très-différentes du gaz oléfiant, tandis que les hydrates, à la classe desquels l'alcool appartiendrait dans la supposition indiquée, montrent en général des propriétés fort-rapprochées de celles des corps correspondans anhydres.

3.° On pourrait imaginer beaucoup d'autres combinaisons des trois élémens deux à deux, qui satisferaient également à la composition de l'alcool, en sorte que le choix entre ces combinaisons reste arbitraire. C'est ainsi que M. Meissner a fait remarquer que l'alcool pouvait être conçu comme résultant de l'union de 3 proportions en volume d'hydrogène protocarburé, et une d'acide carbonique, ainsi qu'il est facile de le vérifier en effet par la composition connue de ces deux gaz.

Il vaut donc mieux s'en tenir à représenter la composition de l'alcool comme résultant de l'union de deux des élémens au troisième, et si on prend pour cette dernière substance l'oxygène, qui est celui qui y entre en moindre proportion en volume, cette combinaison se présente comme immédiatement multiple d'après ce que nous venons de dire, une molécule d'oxygène prenant deux molécules de carbone et six d'oxygène.

Passons à l'éther. L'éther proprement dit, qu'on appelle aussi *éther sulfurique* parce qu'on le prépare ordinairement par le moyen de l'acide sulfurique, quoiqu'on puisse comme

on sait, le produire par l'action de plusieurs autres acides sur l'alcool, est composé, d'après les recherches déjà citées, des mêmes élémens que l'alcool, dans une proportion telle, qu'il formeraient 2 volumes de gaz oléfiant et 1 volume de vapeur d'eau, et son volume à l'état de vapeur est égal à celui de cette vapeur d'eau. En réduisant cette proportion à ces élémens primitifs, on a 2 volumes de carbone, 5 d'hydrogène et  $\frac{1}{2}$  d'oxygène, ou 1 oxygène, 4 carbone, 10 hydrogène, et il y a encore redoublement de volume par rapport à l'oxygène, conformément à la règle qui a lieu dans les composés binaires. Si l'on considérait l'alcool, et l'éther comme formés tous les deux de gaz oléfiant et d'eau, la transformation de l'un dans l'autre, et leur différence chimique serait très-simple, savoir pour changer l'alcool en éther, il ne faudrait qu'enlever au premier la moitié de l'eau combinée avec le gaz oléfiant; le premier serait un hydrate, et le second un sous-hydrate de gaz oléfiant. Mais j'ai déjà exposé les raisons par lesquelles je ne crois pas cette composition probable pour l'alcool, et ces raisons s'appliquent également à l'éther; on pourrait ajouter le peu de probabilité qu'un simple degré différent d'hydratation puisse donner à ces deux liquides des propriétés si différentes. La circonstance indiquée prouve seulement que l'agent qui change l'alcool en éther tend à enlever au premier de l'hydrogène, et de l'oxygène dans la proportion propre à former de l'eau, et d'après cela voici comment on peut concevoir la formation

de l'éther, en les considérans l'un et l'autre comme des composés ternaires immédiats. La conversion de l'alcool en un composé entièrement analogue à l'alcool même, à la différence près des proportions de ses élémens, exigerait simplement qu'on enlevât au premier la moitié de son oxygène, ce qui doublerait tant le carbone que l'hydrogène par rapport à lui, et formerait un composé de

1 oxygène 4 carbone 12 hydrogène;

mais dans le procédé de l'éthérification on ne peut enlever un volume quelconque d'oxygène, sans que cet oxygène entraîne avec lui un volume double d'hydrogène pour former de l'eau. Par là l'éther est réduit à la composition qu'il offre réellement, savoir

$\frac{1}{2}$  oxygène 2 carbone 5 hydrogène,

ou 1 oxygène 4 carbone 10 hydrogène,

au lieu que par la simple soustraction de l'oxygène on n'obtiendrait probablement qu'une espèce différente, et encore inconnue d'alcool. On voit au reste que cette composition est multiple immédiatement, aussi bien que celle de l'alcool, relativement à l'oxygène.

Cette manière de concevoir la composition de l'éther proprement dit, peut être confirmée par la considération de celle de l'éther dit *hydro-chlorique*, parce qu'on se sert de l'action de l'acide hydro-chlorique sur l'alcool pour le préparer, et qui renferme, comme on sait, les élémens de cet acide. D'après une analyse de MM. Robiquet et Colins (dans leur mémoire sur la matière huileuse produite par



le gaz oléfiant avec le chlore), l'éther hydro-chlorique est composé de carbone, d'hydrogène, et de chlore dans une proportion telle à former un volume de gaz oléfiant, et un volume égal de gaz acide hydro-chlorique, condensés en un seul volume, et ces chimistes ont trouvé postérieurement que la densité de la vapeur de cet éther s'accordait avec cette supposition. Si l'on considérait cet éther comme résultant en effet de la réunion de ces deux composés binaires, et qu'on comparât cette composition à celle de l'alcool, et de l'éther ordinaire supposés formés de gaz oléfiant et d'eau, l'éther hydro-chlorique ne différerait de l'alcool que parce que le gaz acide hydro-chlorique y remplace la vapeur d'eau, et de l'éther ordinaire par le même échange, et parce qu'en outre le volume du gaz acide y serait double que celui de la vapeur d'eau dans ce dernier. Ce serait toujours la même analogie commune à l'éther et à l'alcool, et qui porterait à considérer l'alcool lui-même comme une espèce d'éther, ce qui ne paraît pas être le cas. En outre on viendrait à assimiler par là un simple hydrate tel que l'éther ordinaire avec un hydro-chlorate de la même substance, tel que serait l'éther hydro-chlorique. Mais si on réduit cet éther à ses élémens primitifs, on trouve pour sa composition

$\frac{1}{2}$  chlore 1 carbone 2  $\frac{1}{2}$  hydrogène

ou bien 1 chlore 2 carbone 5 hydrogène,

et le volume du composé est toujours double de celui du composant qui entre en moindre volume, selon la règle



ordinaire des composés binaires. Par là la composition de cet éther devient analogue à celle de l'éther ordinaire, si ce n'est que le chlore y remplace l'oxygène, et qu'il est en outre en quantité double relativement au carbone et à l'hydrogène, ou autrement ceux-ci ne sont par rapport au chlore que dans une dose qui est la moitié de celle dans laquelle ils sont combinés avec l'oxygène, en gardant d'ailleurs le même rapport entre eux. L'analogie devient encore plus parfaite, si on se rappelle que le chlore entre en général dans les combinaisons correspondantes en quantité double que l'oxygène en volume, ainsi que je l'ai remarqué dans mon mémoire précédent, en sorte que le redoublement de dose n'est ici qu'une suite de cette tendance générale. D'après ces idées on pourrait appeler l'éther ordinaire *éther d'oxygène*, et l'éther hydro-chlorique *éther de chlore*, et la première de ces dénominations remplacerait bien avantageusement celle d'*éther sulfurique*, qui est évidemment très-impropre, puisque l'acide sulfurique n'entre nullement dans sa composition. Et ce qui caractériserait proprement les *éthers* serait le rapport de 2 à 5 en volume entre la vapeur de carbone, et l'hydrogène joints à une troisième substance qui en ferait la base (1).

Selon cette manière de voir, la matière huileuse formée

---

(1) L'éther hydriodique paraît avoir une composition analogue à celle de l'éther hydro-chlorique, et pourrait en conséquence être appelé selon la même idée *éther d'Iode*.

par l'union du chlore avec le gaz oléfiant, ne pourrait être considérée comme une espèce d'éther; sa composition en volume, selon Robiquet et Colins (mémoire cité) est fort-simple; ses élémens sont 1 volume de chlore, et le carbone et l'hydrogène dans une quantité telle à former un autre volume de gaz oléfiant, ce qui se réduit à

1 chlore 1 carbone 2 hydrogène.

On voit qu'elle diffère de l'*éther de chlore* non seulement parce que la dose du carbone par rapport au chlore est réduite à moitié, mais aussi par une proportion moindre d'hydrogène par rapport au carbone, que celle qui caractérise en général les éthers, d'après l'idée proposée (1).

5. Mais un grand nombre de composés organiques ternaires, surtout d'après les analyses de M. Berzelius, renferment les trois élémens dans de telles proportions, qu'en prenant pour base la substance qui y entre pour un moindre volume, les deux autres, ou du moins l'une de celles-ci n'en sont pas immédiatement multiples en volume, et il

---

(1) Le Camphre, qu'on peut regarder comme une huile essentielle concrète nous offre encore selon l'analyse de M. De-Saussure un exemple de ces composés ternaires immédiatement multiples par rapport à un de leurs élémens pris pour base. Selon cette analyse l'oxygène, le carbone, et l'hydrogène y sont dans une telle proportion, qu'il en pourrait résulter un volume de vapeur de carbone porté à l'état de gaz oxide de carbone avec cinq volumes de carbone portés à l'état de gaz oléfiant. Il est facile de voir que cette composition revient à

1 oxygène 6 carbone 10 hydrogène.

s'agit de faire voir, comment on peut leur appliquer un procédé analogue à celui que nous avons employé pour les combinaisons binaires, pour les ramener à la théorie des combinaisons multiples.

Pour exposer cette manière de procéder d'une manière moins abstraite je commencerai à l'appliquer en particulier au sucre de cannes, d'après la composition que M. Berzelius lui a attribué, et je chercherai ensuite à la généraliser, et à la représenter par une formule générale applicable à tous les cas.

M. Gay-Lussac, d'après sa propre analyse considère le sucre comme formé des élémens de l'eau, et d'une quantité de carbone, dont le volume à l'état de gaz d'après notre évaluation serait égal à celui du gaz oxygène contenu dans cette eau, ce qui revient à

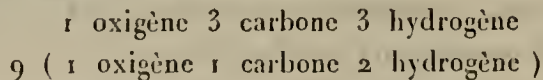
1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène.

Mais M. Berzelius par son analyse y a trouvé ces trois substances dans la proportion beaucoup plus compliquée de  
10 oxygène 12 carbone 21 hydrogène.

C'est cette composition que nous chercherons ici à réduire aux combinaisons multiples, pour servir d'exemple, sans rien décider sur la probabilité que l'une plutôt que l'autre de ces deux analyses soit la véritable.

Considérons donc d'abord en elle-même cette composition du sucre de Berzelius; il est facile de voir qu'elle peut être aisément ramenée à une combinaison multiple. Car en commençant par comparer l'oxygène avec l'hydro-

gène, la proportion de 10 à 21 revient à celle de 1 à  $2\frac{1}{10}$ ; cette proportion se trouvant entre celle de 1 à 2 et celle de 1 à 3, pourra être expliquée, selon notre règle générale pour les composés binaires, par une combinaison en nombres entiers de deux composés formés avec ces proportions; et en effet si on prend d'un côté 9 d'oxygène unis avec 18 d'hydrogène, proportion de 1 à 2 qui forme l'eau, et de l'autre 1 d'oxygène et 3 d'hydrogène, on aura un composé de 10 d'oxygène et 21 d'hydrogène comme celui dont il s'agit. Maintenant si des 12 de carbone on en attribue 9 au premier des composés binaires dont nous venons de parler, il en restera 3 pour le second, ou le triple de l'oxygène qui y entre. Ainsi on peut dire enfin que le sucre de Berzelius est formé d'un composé d'oxygène, de carbone et d'hydrogène tel que celui qui constitue le sucre entier selon Gay-Lussac, mais réuni avec un autre composé, dans lequel il y a 3 molécules de carbone, et 3 molécules d'hydrogène pour une d'oxygène, et dans une proportion telle que 9 molécules d'oxygène du premier composé s'unissent avec une seule molécule d'oxygène du second. Ainsi cette composition sera représentée par



combinaison toute multiplié par rapport à la première molécule d'oxygène.

Ce résultat est très-simple; mais nous avons profité pour y parvenir de la possibilité de décomposer le nombre 12

de carbone en deux parties qui fussent des multiples de l'oxygène, et l'hydrogène dans les deux parties de la combinaison entre l'oxygène, et l'hydrogène que nous avons d'abord considérée. Une semblable circonstance ne se présentera pas toujours dans les composés de ce genre. Pour suivre par rapport au sucre même, une marche applicable à tous le cas, après avoir exprimé comme ci-dessus le rapport de l'hydrogène à l'oxygène, comme pour une combinaison binaire par

9 oxygène 18 hydrogène

1 oxygène 3 hydrogène,

nous en ferons autant séparément pour le rapport de 12 à 10, ou 6 à 5 entre le carbone et l'oxygène, et appliquant la règle générale à cet égard pour les combinaisons binaires, nous aurons

1 oxygène 2 carbone

4 oxygène 4 carbone.

Maintenant nous observerons que le nombre entier de molécules d'oxygène qui forment les deux premiers composés, c'est-à-dire les deux hydrures étant de 10, si nous multiplions par 10 les molécules d'oxygène qui forment les deux derniers composés ou les deux carbures, nous pourrions décomposer chacun des deux carbures en 10 parties dont 9 soient combinées avec le double de molécules d'hydrogène comme dans le premier hydrure, et 1 avec 3 molécules d'hydrogène comme dans le second hydrure, et la combinaison ternaire totale sera ainsi décomposée en quatre composés ternaires partiels, dont chacun sera multiple relativement à la substance qu'on a pris pour base, et qui



seront aussi multiples par rapport à l'un d'eux. C'est ce qui devient visible pour le sucre dans ce tableau :

oxigène	{	9 oxigène	18 carbone	18 hydrogène
$1 \times 10 = 10$	{	1 oxigène	2 carbone	3 hydrogène
$4 \times 10 = 40$	{	36 oxigène	36 carbone	72 hydrogène
	{	4 oxigène	4 carbone	12 hydrogène

---

Total 50

60

105

où les nombres 50, 60 et 105 ont entr'eux les mêmes rapports que 10, 12, et 21, et qu'on peut exprimer plus simplement par

- 1. ( 1 oxigène 2 carbone 3 hydrogène )
- 4 ( 1 oxigène 1 carbone 3 hydrogène )
- 9 ( 1 oxigène 2 carbone 2 hydrogène )
- 36 ( 1 oxigène 1 carbone 2 hydrogène )

Le dernier de ces quatre composés, qui entre dans le composé total pour 36 molécules est encore ici le sucre de M. Gay-Lussac ; en sorte que celui de M. Berzelius n'en diffère que par les trois autres composés partiels qu'il faut y joindre pour en exprimer la complication.

Dans le cas particulier dont il s'agit la composition que nous venons de trouver peut être simplifiée, par un simple transport de molécule de l'un des composés partiels à l'autre ; en effet si l'on a recours au premier tableau ci-dessus par lequel nous l'avons représentée, avec les nombres des molécules séparés, savoir



1 oxygène 2 carbone 3 hydrogène

4                    4                    12

9                    18                    18

36                    36                    72

on verra aisément que si on ôte 9 de carbone du 3.<sup>e</sup> composé, et qu'on en attribue 1 de plus au premier et 8 de plus au second, cette composition revient, sans altérer le nombre total de molécules à

1 oxygène 3 carbone 3 hydrogène

4                    12                    12

9                    9                    18

36                    36                    72

ou bien

1 ( 1 oxygène 3 carbone 3 hydrogène )

4 ( 1 oxygène 3 carbone 3 hydrogène )

9 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

36 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

où l'on voit que les deux premiers composés partiels deviennent identiques entre eux, et les deux autres aussi entre eux; et comme le rapport de 4 à 36 est le même que celui d'un à 9, la composition se réduit simplement à

1 ( 1 oxygène 3 carbone 3 hydrogène )

9 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

savoir à cette composition même que nous avons trouvé d'abord par des considérations particulières au composé dont il s'agit.

Des simplifications analogues ne seront pas toujours possibles ; mais quant au procédé par lequel nous avons trouvé l'autre forme plus compliquée , pour la réduction du sucre aux combinaisons multiples , il est visible qu'on peut l'appliquer à tous les composés ternaires , pourvu que les rapports particuliers entre la substance qui entre en moindre volume , et les deux autres ne tombent pas dans le cas d'exception que nous avons indiqué ci-dessus pour les composés binaires mêmes , auquel cas cependant on pourra toujours parvenir au but par l'application successive de la règle générale plusieurs fois de suite au même rapport , ainsi que nous l'avons expliqué pour les composés binaires.

6. Mais essayons de représenter par des formules générales le procédé que nous venons de suivre pour le sucre, et son résultat , afin de pouvoir l'appliquer avec facilité à tout autre composé ternaire.

Soit par cela  $a, b, c$  les nombres entiers les plus petits, par lesquels on puisse exprimer la proportion des trois éléments en volumes ou en molécules dans un composé ternaire , d'après l'expérience , et disposés dans l'ordre de leur grandeur en commençant par le plus petit. Le nombre de molécules du second élément sera à celui du premier comme  $b$  à  $a$  , ou comme  $\frac{b}{a}$  à 1 ,  $\frac{b}{a}$  étant une fraction impropre , c'est-à-dire équivalent à un nombre entier avec fraction en sorte qu'on pourra la représenter par  $m + \frac{p}{q}$ ,  $m$  étant un nombre entier , et  $\frac{p}{q}$  une fraction proprement dite ou inférieure à l'unité. S'il n'y avait que ces

deux composans, on pourrait reduire leurs combinaisons à la théorie des multiples par la règle plusieurs fois citée, c'est-à-dire qu'il faudrait prendre  $q-p$  molécules d'un composé où la proportion des élémens fût de 1 à  $m$ , et  $p$  molécules d'un composé dans la proportion de 1 à  $m+1$ . Faisons maintenant entrer en considération le 3.<sup>e</sup> élément dont le nombre de molécules est  $c$ ; s'il n'y avait que lui dans le composé, uni avec le nombre  $a$  de molécules du premier, il faudrait concevoir de même une combinaison de  $q'-p'$  molécules d'un composé dans la proportion de 1 à  $m'$ , et  $p'$  molécules d'un composé dans la proportion de 1 à  $m'+1$ ,  $m'$ ,  $q'$ ,  $p'$  étant des nombres formés d'une manière analogue à  $m$ ,  $q$ , et  $p$ , c'est-à-dire de manière qu'on ait  $\frac{c}{a} = m' + \frac{p'}{q'}$ . Or ce rapport de composition peut être introduit dans la combinaison des deux premiers élémens, que nous avons d'abord considérés, en multipliant par le nombre  $q'$  de molécules chacun des deux composés que nous y avons conçu, ce qui n'en change pas le rapport, et partageant pour chacun de ces composés le nombre qui en résulte dans le rapport de  $q'-p'$  et  $p'$  molécules combinées dans les rapports indiqués avec le 3.<sup>e</sup> élément. On aura ainsi

$(q'-p')(q-p)$	molécules d'un composé de 1, $m$ , $m'$
$p'(q-p)$	1, $m$ , $m'+1$
$(q'-p')p$	1, $m+1$ , $m'$
$p'p$	1, $m+1$ , $m'+1$

Chaque composé partiel aura comme on voit, pour base

une seule molécule de la substance qui entre en moindre proportion, et la réduction à la théorie des multiples sera exécutée, si une des quantités qui expriment le nombre de molécules des composés partiels est égal à l'unité.

Faisons par exemple  $a=10$ ,  $b=12$ ,  $c=21$  comme pour le sucre selon l'analyse de Berzelius. Nous aurons

$$\frac{b}{a} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5} \text{ et par là } m=1, p=1, q=5$$

$$\frac{c}{a} = \frac{21}{10} = 2 \frac{1}{10} \text{ et par là } m'=2, p'=1, q'=10$$

$$\text{Donc } (q'-p')(q-p) = 9.4 = 36$$

$$p'(q-p) = 1.4 = 4$$

$$(q'-p')p = 9.1 = 9$$

$$p'.p. = 1.1 = 1$$

et mettant en outre dans les composés partiels les nombres

$$m=1, m+1=2$$

$$m'=2, m'+1=3$$

il viendra la composition indiquée par le tableau suivant

36 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

4 ( 1 oxygène 1 carbone 3 hydrogène )

9 ( 1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène )

1 ( 1 oxygène 2 carbone 3 hydrogène )

qui est précisément celui que nous avons déjà trouvé en appliquant le même procédé directement à ce composé.

7. On voit donc par ce que nous avons dit qu'il est toujours possible de ramener les composés ternaires à des combinaisons multiples par rapport à celui des élémens qui y entre pour un moindre nombre de molécules. Par là le

but de la théorie est rempli, comme dans les composés binaires, lorsqu'on les a réduits à être multiple par rapport à l'un des élémens, qui est nécessairement celui qui y entre en moindre proportion. Mais pour les composés binaires, lorsqu'on est parvenu à ce but, rien n'empêche de renverser l'expression de leur composition, en prenant pour base l'élément qui entre en plus grande proportion, et indiquant la quantité de l'autre élément par une fraction. C'est ainsi, pour employer un exemple tiré des combinaisons immédiatement, et simplement multiples, que quoique la théorie exige, ainsi que je l'ai remarqué dans mon mémoire précédent, qu'on considère l'eau comme un hydrure d'oxygène, dans lequel une molécule d'oxygène en prend deux d'hydrogène, on peut néanmoins sans inconvénient exprimer aussi cette combinaison en prenant l'hydrogène pour base, en sorte que ce soit un oxide d'hydrogène dans lequel le volume de l'oxygène est la moitié de celui de l'hydrogène. Cette inversion ne change rien à la réalité, et il est toujours vrai, que l'un des composans est multiple de l'autre, soit qu'on représente ce dernier par l'unité, et le premier par un nombre entier, soit qu'au contraire on représente par l'unité celui qui entre dans la combinaison pour un certain nombre de molécules, et l'autre par une fraction ayant l'unité pour numérateur. Cela peut être étendu même aux composés qu'on ne réduit à la théorie des multiples que par deux composés qui y sont assujettis, selon la règle que nous en avons donné; car quand



on a prouvé par exemple que le rapport de 2 à 3 entre les volumes ou molécules de deux composans peut être réduit à cette théorie, rien n'importe qu'on dise qu'une molécule de l'un prend  $\frac{3}{2}$  ou  $1 \frac{1}{2}$  molécules de l'autre, ou que celui-ci prend  $\frac{2}{3}$  de molécules du premier.

La possibilité de ces inversions d'expression a l'avantage de nous laisser libres sur le choix de la substance qu'on veut prendre pour base, et de nous permettre de le faire de manière à donner plus de régularité à la nomenclature; c'est ainsi, par exemple, que le protoxide d'azote pourra être continué à être considéré comme un degré d'oxygénation de l'azote, qui fait partie de la série formée par les autres oxides et acides de ce radical, au lieu qu'il faudrait sans cela rigoureusement le regarder comme une azoture d'oxygène, ainsi que je l'avais dit dans mon mémoire, puisque c'est l'oxygène qui y entre pour un moindre volume. En général selon cette considération on pourra fixer d'après une qualité quelconque la substance qu'on veut prendre pour base préférablement à l'autre dans un composé binaire, par exemple se faire un système de prendre toujours pour base la substance la moins oxygénique, ainsi que cela paraît en général assez conforme à l'usage, sans qu'il en résulte aucun inconvénient pour la théorie.

Or cette inversion n'est pas toujours immédiatement possible, du moins d'une manière si complète, pour les composés ternaires ramenés par le procédé indiqué ci-dessus à être multiples par rapport à la substance qui y entre



en moindre proportion, ou même qui sont immédiatement tels. Car l'inversion consisterait ici, telle qu'elle se présente immédiatement, à dire que des trois composans  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dont  $b$  et  $c$  sont multiples, ou peuvent être amenés à être multiples de  $a$ ,  $a$  réciproquement est, ou peut être considéré comme un aliquote tant de  $b$ , que de  $c$ , et à exprimer quelle fraction il en est. Il y aurait donc, d'après cette expression, deux bases différentes  $b$ , et  $c$  du composé au lieu d'une seule qu'on peut désirer de substituer à  $a$ . Pour arriver à ce but il faudrait, en supposant par exemple  $b$  en moindre proportion que  $c$ , pouvoir aussi considérer  $c$  comme multiple de  $b$ ; car alors on pourrait prendre indifféremment pour base  $a$ ,  $b$ , ou  $c$ , puisque  $c$  étant multiple de  $b$  le serait aussi de  $a$ ; que  $a$  serait considéré comme aliquote, et  $c$  comme multiple de  $b$ ; qu'enfin  $a$  étant aliquote de  $b$ , et  $b$  aliquote de  $c$ , l'un et l'autre seraient ainsi aliquotes de  $c$  pris pour base. Or il peut bien arriver que dans le résultat du procédé que nous avons exposé ci-dessus  $c$  devienne ou puisse être considéré comme multiple de  $b$ , aussi bien que  $b$  de  $a$ ; mais ce n'est pas là une suite nécessaire de la nature de ce procédé, et il peut arriver souvent que cela n'ait pas lieu. Pour pouvoir donc procurer au résultat de la réduction des composés ternaires à la théorie des multiples, d'une manière générale, l'avantage que présente celui relatif aux composés binaires de pouvoir être renversé dans son expression, il faut suivre un autre procédé dans cette réduction,

par lequel on détermine combien de molécules il faut prendre des élémens de chaque composé partiel, et combien de molécules il faut prendre des composés partiels mêmes, pour que la substance qui entre en proportion moyenne puisse être considérée comme multiple de celle qui entre en moindre proportion, et la substance qui entre pour le plus grand nombre de molécules comme multiple de celle qui y entre pour un nombre moyen, au lieu de rendre, comme par le premier procédé, deux des élémens multiples du 3.<sup>e</sup>

Or il n'est pas difficile de trouver ce nouveau procédé par des principes analogues à ceux que nous avons suivis pour le premier. Car soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , comme ci-dessus, les trois substances composantes, et dans l'ordre du nombre de molécules pour lequel elles entrent dans le composé, en commençant par le plus petit; il faudra d'abord réduire selon la règle ordinaire la combinaison de  $b$  avec  $a$ , et celle de  $c$  avec  $b$  séparément, à la théorie des multiples, et prendre ensuite autant de molécules des composés partiels de  $a$  avec  $b$ , qu'il en faut pour que le nombre de molécules de  $b$  qui en résulte puisse être décomposé dans les composés partiels de  $b$  avec  $c$ .

Pour fixer les idées prenons encore par exemple le sucre de Berzelius. Commencant par comparer le carbone à l'oxygène, dont le rapport en molécules est de 6 à 5 ou  $1\frac{1}{5}$  à 1, on aura, comme ci-dessus, pour la réduction de ce rapport à la théorie des multiples les deux composés

partiels

4 oxygène 4 carbone

1 oxygène 2 carbone

en comparant ensuite l'hydrogène au carbone, dont le rapport est de 21 à 12 ou  $1\frac{3}{4}$  à 1, on aura pour la réduction, selon la même règle,

1 carbone 1 hydrogène

3 carbone 6 hydrogène;

il s'agit donc de multiplier les deux quantités de carbone des deux premiers composés par 3 + 1 ou 4, pour pouvoir ensuite les décomposer en deux portions qui soient entre elles comme 1 à 3, et distribuer entre elles l'oxygène et l'hydrogène comme les deux rapports l'exigent. On trouvera ainsi

carbone 4. 4=16	{	4 carbone	4 oxygène	4 hydrogène
		12 carbone	12 oxygène	24 hydrogène
carbone 2. 4=8	{	2 carbone	1 oxygène	2 hydrogène
		6 carbone	3 oxygène	12 hydrogène
		<hr/>	<hr/>	<hr/>
		24	20	42

où l'on voit que les nombres de molécules des trois élémens ont entre eux le même rapport que dans la composition d'où nous sommes partis, et sont seulement tous doublés.

Pour exprimer maintenant par une formule générale le résultat de cette manière de procéder dans tous les cas, les nombres des élémens des trois élémens d'un composé ternaire étant toujours  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et dans l'ordre indiqué

de grandeur, faisons  $\frac{b}{a} = m + \frac{p}{q}$ , et  $\frac{c}{b} = m' + \frac{p'}{q'}$ ; on trouvera aisément, en généralisant ce que nous avons dit par rapport au sucre, que les proportions à prendre, des différentes substances sont exprimées par le tableau suivant.

	$b$	$a$	$c$
substanc. $b$ {	$(q-p).m(q'-p')$	$(q-p)(q'-p')$	$(q-p)m.(q'-p')m'$
$(q-p)m.q'$ {	$(q-p).m.p'$	$(q-p)p'$	$(q-p)m.p'.(m'+1)$
substanc. $b$ {	$p(m+1)(q'-p')$	$p(q'-p')$	$p(m+1)(q'-p')m'$
$(m+1)q'$ {	$p(m+1)p'$	$p.p'$	$p(m+1)p'(m'+1)$

En faisant par exemple  $a=10$ ,  $b=12$ ,  $c=21$ , comme cela a lieu dans le sucre de Berzelius, et par conséquent

$$m=1, p=1, q=5.$$

$$m'=1, p'=3, q'=4,$$

et substituant ces valeurs dans le tableau, on obtient les mêmes nombres que nous avons trouvé en considérant directement ce cas. (1)

8. Il est facile de voir, dans l'exemple du sucre, que la composition ainsi déterminée se prête également à prendre pour base telle des trois substances composantes que l'on voudra, ainsi que nous nous l'étions proposé.

Si on veut par exemple prendre l'oxygène pour base

(1) On pourrait par un procédé analogue arranger les composés partiels de manière que les deux substances  $a$ ,  $b$  fussent des aliquotes de  $c$  qui entre en plus grande proportion dans le composé, sans assujettir en même temps  $a$  à être aliquote de  $b$ , mais cela ne satisferait pas d'une manière générale à la théorie des combinaisons multiples, comme nous nous le sommes proposé ici.

comme dans le premier procédé, on aura, sans faire aucun changement aux nombres, et disposant seulement les composés partiels par ordre, le tableau suivant

1 oxygène	2 carbone	2 hydrogène
3	6	12
4	4	4
12	12	24

ou bien

- 1 ( 1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène. )
- 3 ( 1 oxygène 2 carbone 4 hydrogène )
- 4 ( 1 oxygène 1 carbone 1 hydrogène )
- 12 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

qu'on peut mettre encore sous la forme suivante, où la subordination successive du nombre de molécules des trois élémens est mise en évidence

- 1 [ 1 oxygène ; 2 ( 1 carbone 1 hydrogène ) ]
- 3 [ 1 oxygène ; 2 ( 1 carbone 2 hydrogène ) ]
- 4 [ 1 oxygène ; 1 ( 1 carbone 1 hydrogène ) ]
- 12 [ 1 oxygène ; 1 ( 1 carbone 2 hydrogène ) ]

Encore ici le dernier composé partiel, qui entre pour un plus grand nombre de molécules, revient au sucre de M. Gay-Lussac ; les autres forment la complication particulière admise par M. Berzelius. Il est remarquable au reste que la composition indiquée par ce tableau se présente sous une forme entièrement différente, soit de celle que nous avons trouvée par le premier procédé, soit de celle plus simple que nous avons trouvée d'abord par la considération particulière au sucre ; c'est une suite du but plus général

que nous avons à remplir par notre second procédé ci-dessus, et qui doit nécessairement introduire une complication différente dans le résultat. Mais on peut toujours réduire par des transpositions de molécules d'un composé partiel à l'autre, ces formules l'une à l'autre. On peut par exemple réduire notre dernière formule à la forme plus simple que nous avons trouvé d'abord pour la réduction du sucre à la théorie des multiples, par les transpositions indiquées dans le tableau suivant :

1+1	oxygène	2+4	carbone	2+4	hydrogène
3-1		6-4		12-8	
4		4		4+4	
12		12		24	

ou bien

2	oxygène	6	carbone	6	hydrogène
2		2		4	
4		4		8	
12		12		24	

où l'on voit que les proportions dans les trois derniers composés sont les mêmes, en sorte qu'en les réunissant tous les trois ensemble, on a

2	oxygène	6	carbone	6	hydrogène
18		18		36	

ou en divisant par 2,

1	oxygène	3	carbone	3	hydrogène
9		9		18	

qui est la composition plus simple dont nous avons parlé.



Supposons maintenant qu'on veuille prendre le carbone pour base; on pourra réduire à 1 les deux molécules de carbone que le tableau général présente dans le composé partiel dont le nombre de molécules est moindre, et divisant également par 2 les autres nombres, pour conserver les mêmes rapports, on aura le tableau suivant

1 carbone	$\frac{1}{2}$ oxygène	1 hydrogène
2	2	2
3	$1 \frac{1}{2}$	6
6	6	12

ou bien

- 1 ( 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène 1 hydrogène )
- 2 ( 1 carbone 1 oxygène 1 hydrogène )
- 3 ( 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène 2 hydrogène )
- 6 ( 1 carbone 1 oxygène 2 hydrogène ),

dans lequel on voit que l'oxygène est dans tous les composés partiels un aliquote du carbone, et l'hydrogène un multiple, ce qui suffit pour mettre la réduction au multiple en évidence.

Enfin si l'on veut renverser l'expression de cette réduction par rapport à l'hydrogène pris pour base, il n'y a qu'à réduire de même à l'unité les 2 molécules d'hydrogène qui entrent dans le composé partiel moins abondant, et diviser également par 2 les autres nombres, et on aura le tableau suivant

1	hydrogène	1	carbone	$\frac{1}{2}$	oxygène
2		2		2	
6		3		1	$\frac{1}{2}$
12		9		6	

ou bien

- 1 ( 1 hydrogène 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène )
- 2 ( 1 hydrogène 1 carbone 1 oxygène )
- 6 ( 1 hydrogène  $\frac{1}{2}$  carbone  $\frac{1}{4}$  oxygène )
- 12 ( 1 hydrogène  $\frac{1}{2}$  carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène )

où l'on voit que dans les composés partiels le carbone est par tout un aliquote de l'hydrogène, et l'oxygène un aliquote non seulement de l'hydrogène, mais aussi du carbone, ce qui était la condition requise.

C'est ce qui est rendu plus évident par la forme suivante que l'on peut encore donner au tableau

- 1 [ 1 hydrogène. 1 ( 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène ) ]
- 2 [ 1 hydrogène. 1 ( 1 carbone 1 oxygène ) ]
- 6 [ 1 hydrogène.  $\frac{1}{2}$  ( 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène ) ]
- 12 [ 1 hydrogène.  $\frac{1}{2}$  ( 1 carbone 1 oxygène ) ]

ou bien encore :

- 1 [ 1 hydrogène.  $\frac{1}{2}$  ( 1 oxygène 2 carbone ) ]
- 2 [ 1 hydrogène. 1 ( 1 oxygène 1 carbone ) ]
- 6 [ 1 hydrogène.  $\frac{1}{4}$  ( 1 oxygène 2 carbone ) ]
- 12 [ 1 hydrogène.  $\frac{1}{2}$  ( 1 oxygène 1 carbone ) ]

Nous pouvons remarquer maintenant que dans ce cas particulier du sucre de Berzelius l'expression même la plus simple que nous avons trouvé d'abord en regardant la

substance dont la proportion y est moindre, c'est-à-dire l'oxygène, comme la base, savoir:

1 ( 1 oxygène 3 carbone 3 hydrogène )

9 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

satisfaisait déjà par elle-même à la condition que dans les composés partiels l'hydrogène fût multiple du carbone aussi bien que de l'oxygène, ce qui rendait cette expression susceptible des mêmes renversemens que nous venons de pratiquer sur la formule trouvée par notre dernier procédé. En effet si on veut prendre le carbone pour base, cette expression devient, en divisant tous les nombres par 3,

1 ( 1 carbone  $\frac{1}{3}$  oxygène 1 hydrogène )

3 ( 1 carbone 1 oxygène 2 hydrogène ),

et si on veut prendre l'hydrogène pour base, elle devient de même en divisant tous les nombres par 3

1 ( 1 hydrogène 1 carbone  $\frac{1}{3}$  oxygène )

6 ( 1 hydrogène  $\frac{1}{2}$  carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène ),

expressions assujetties aux mêmes conditions que celles que nous avons trouvées par notre procédé général, et beaucoup plus simples. Mais ce n'est là pour ainsi dire qu'un accident propre à la combinaison particulière du sucre de Berzelius, au lieu que notre procédé, par la marche même que nous y avons suivi, conduit nécessairement dans tous les cas à une expression susceptible du renversement dont il s'agit. Cette expression est seulement dans quelques cas susceptible de quelque simplification particulière, comme on le voit dans le sucre, où il serait facile d'imaginer des

transports de molécules, qui transformeraient nos expressions générales dans celles plus simples dont nous venons de parler, ainsi que nous l'avons pratiqué ci-dessus pour des simplifications analogues.

Enfin je ferai encore observer que dans l'exemple du sucre la substance prise pour base, dans les inversions dont nous venons de parler, s'est toujours trouvée présenter une combinaison multiple, d'un composé partiel à l'autre. Cela n'est pas une conséquence nécessaire du procédé que nous avons employé, et peut ne pas avoir lieu pour d'autres composés, et nous en verrons bientôt un exemple; mais ce défaut possible, dans la simplicité du résultat, est commun même aux inversions des composés binaires, et n'est pas un obstacle à ce qu'on regarde l'inversion comme praticable, puisqu'il est toujours vrai, que si la combinaison est multiple par rapport à la substance qui entre en moindre volume, l'expression directe ou inverse du rapport de la combinaison ne touche aucunement à la théorie. D'ailleurs il est toujours possible de ramener dans ce cas l'expression de la combinaison à la forme ordinaire par rapport à la substance qu'on a pris pour base, en appliquant encore à la combinaison des composés partiels qui ne satisfait pas à cette forme, la règle ordinaire pour rendre multiples les combinaisons qui ne se présentent pas immédiatement comme telles, ce qui introduira seulement un peu plus de complication dans la composition totale.

9. Notre procédé peut être nécessaire, pour pratiquer les

inversions dont nous avons parlé, même sur ceux des composés ternaires, qui se présentent immédiatement comme multiples par rapport à la substance qui y entre pour un moindre nombre de molécules, savoir toutes les fois que les deux autres substances ne se présentent pas comme multiples l'une de l'autre. Tel est par exemple l'éther, dont la composition est comme nous avons vu au n.<sup>o</sup> 4

1 oxygène 4 carbone 10 hydrogène

et où comme on voit l'hydrogène n'est pas multiple du carbone, quoique l'un et l'autre le soient par rapport à l'oxygène. Dans ces cas la marche et le résultat sont plus simples, puisqu'il n'y a que le rapport entre le carbone et l'hydrogène qui ait besoin d'être réduit au multiple par la règle ordinaire, celui du carbone à l'oxygène l'étant déjà naturellement, et on parvient au but par deux composés partiels seulement. Et si l'on veut appliquer ici la formule générale, il faut remarquer que le rapport d'un entier à l'unité peut être représenté par cet entier, plus  $\frac{0}{1}$ . Ainsi dans le cas de l'éther nous avons

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{1} = 4 + \frac{0}{1}, \text{ d'où } m = 4, p = 0; q = 1$$

$$\frac{c}{b} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}, \text{ d'où } m' = 2, p' = 1, q' = 2$$

D'après cela on trouve pour la composition de l'éther

4 carbone 1 oxygène 8 hydrogène

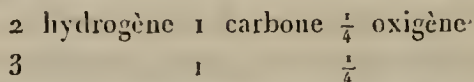
4                    1                    12

Si d'après cela on veut prendre le carbone pour base, on aura

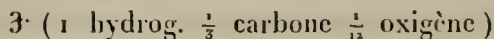
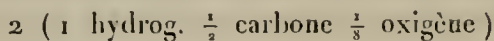
1 carbone  $\frac{1}{4}$  oxygène 2 hydrogène

1                     $\frac{1}{4}$                     3

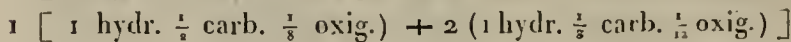
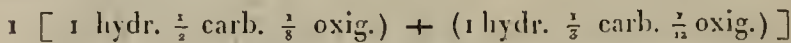
ce qui n'offre point de difficulté ; mais si on veut prendre pour base l'hydrogène , les deux nombres 8 et 12 n'ayant pas de diviseur commun plus grand que 4 , la combinaison prendra la forme



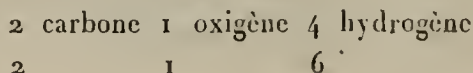
où dans chaque composé partiel l'oxygène est aliquote du carbone , et le carbone aliquote de l'hydrogène ; mais où l'hydrogène 3 du second composé partiel n'est pas multiple de l'hydrogène 2 du premier. C'est un exemple d'un des cas moins simples de ces inversions , dont j'ai parlé à la fin du n.<sup>o</sup> précédent. Cela ne porte pas atteinte à la théorie , comme je l'ai dit ; mais si on veut réduire l'expression renversée par rapport à l'hydrogène , à la forme ordinaire des combinaisons multiples , il n'y a qu'à appliquer ici la règle ordinaire , à ces deux composés partiels , après les avoir mis sous la forme



et on parviendra ainsi à la forme plus compliquée , mais équivalente



L'éther de chlore nous présente un exemple analogue ; en y appliquant notre procédé on trouve





En prenant pour base le carbone, on a d'après cela

1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène 2 hydrogène

1                       $\frac{1}{2}$                       3

mais en prenant pour base l'hydrogène on a

2 hydrogène 1 carbone  $\frac{1}{2}$  oxygène

3                      1                       $\frac{1}{2}$

ou bien

2 ( 1 hydrogène  $\frac{1}{2}$  carbone  $\frac{1}{4}$  oxygène )

3 ( 1 hydrogène  $\frac{1}{3}$  carbone  $\frac{1}{6}$  oxygène )

qu'on ne peut réduire à des composés partiels multiples l'un de l'autre que par une transformation analogue à celle que nous venons d'employer pour l'éther ordinaire.

La composition de l'alcool au contraire peut être renversée de manière à prendre pour base, telle des trois substances composantes que l'on voudra sans l'application de notre procédé, parce que l'hydrogène y est multiple du carbone en même temps que l'un et l'autre sont multiples de l'oxygène (1).

(1) Le camphre, selon la composition que nous avons indiquée dans la note au n.<sup>o</sup> 4 d'après l'analyse de M. Saussure nous offre un exemple d'un cas où l'application de notre formule est nécessaire pour l'inversion, mais sans la complication particulière dont nous venons de parler. En faisant cette application on trouve pour sa composition

6 carbone 1 oxygène 6 hydrogène

12                      2                      24

En prenant pour base le carbone, on a

1 carbone  $\frac{1}{6}$  oxygène 1 hydrogène

2 ( 1 carbone  $\frac{1}{6}$  oxygène 2 hydrogène )

10. La possibilité de réduire à des combinaisons multiples tous les composés ternaires étant ainsi démontrée, et les procédés pour y parvenir sous différentes formes étant établis, il serait intéressant d'appliquer maintenant ces procédés aux différens composés ternaires organiques connus, pour en représenter la composition sous ce point de vue. Mais ce détail nous menerait trop loin, et on ne pourrait pas même peut-être s'en occuper avec tout le fruit qu'on peut en attendre, dans l'état actuel de l'analyse des substances organiques, vu les incertitudes qui restent encore sur les proportions précises des élémens dans plusieurs de ces substances. Je me contenterai donc d'ajouter ici quelques considérations sur quelques unes de ces substances, plus connues, tirées des trois classes dans lesquelles on peut les diviser, savoir des substances où l'oxygène et l'hydrogène sont ou exactement ou à-peu-près dans la proportion nécessaire pour former de l'eau, de celles où l'oxygène est en excès sur les élémens de l'eau, et de celle où c'est au contraire l'hydrogène qui est en excès.

11. Dans la première classe il se présente d'abord le sucre de cannes, qui nous a déjà servi d'exemple pour notre réduction des composés ternaires à la théorie des

En prenant pour base l'hydrogène, on a

$$1 \text{ hydrogène } 1 \text{ carbone } \frac{1}{6} \text{ oxygène}$$

$$4 \left( 1 \text{ hydrogène } \frac{1}{2} \text{ carbone } \frac{1}{12} \text{ oxygène} \right)$$

multiples, d'après l'analyse de M. Berzelius; mais nous y revenons ici pour examiner la probabilité de cette composition même, et la comparer avec celle de quelques autres substances de la même classe, qui y ont beaucoup de rapport.

Nous avons déjà remarqué que M. Gay-Lussac attribue au sucre, d'après les expériences qu'il a fait lui-même avec M. Thénard, une composition beaucoup plus simple: et cette même composition il la retrouve encore dans la gomme arabique, et dans l'amidon, savoir 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène, au lieu que M. Berzelius assigne à chacune de ces substances, d'après ses analyses une composition particulière, quoique toujours peu différente de celle dont on vient de parler, de même que pour le sucre, quant à la quantité des élémens en poids. Dans aucune de ces compositions, exceptée celle de la gomme, l'oxygène et l'hydrogène ne sont précisément dans la proportion nécessaire pour former l'eau, comme dans la composition simple de Gay-Lussac, mais dans une proportion très-approchante de celle-là, et différente pour chacune d'elles.

On a vu ci-dessus comment la composition du sucre de Berzelius peut être ramené à la théorie des multiples, et que le résultat de cette réduction est essentiellement la réunion d'un nombre considérable de molécules du sucre de Gay-Lussac avec un petit nombre de molécules d'un ou de plusieurs composés ternaires différens de celui-là. Nous verrons bientôt que la gomme et l'amidon nous présentent

des résultats analogues. Mais ici se présente la question de savoir, s'il est probable que ces compositions plus compliquées de Berzelius sont les véritables, ou si l'on peut s'en tenir au résultat général et plus simple de M. Gay-Lussac. Ce qu'on peut répondre à cette question, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est qu'il est peu probable que des substances si différentes entr'elles dans leurs propriétés, que le sucre, la gomme, et l'amidon aient une composition chimique absolument identique, et puisque les analyses s'accordent à donner pour ces substances une composition fort peu différente, il faut qu'elles s'écartent toutes, ou tout-au-plus à l'exception d'une seule, de la simplicité de composition commune que M. Gay-Lussac leur attribue, et qu'elles diffèrent réellement entr'elles par des nombres relatifs de molécules peu différens de ceux qui répondraient à cette simplicité. M. Berzelius a cru pouvoir déterminer précisément ces différences de composition par l'analyse : peut-être n'a-t-il pas toujours rencontré juste dans une recherche si délicate ; mais l'exactitude que M. Berzelius apporte en général dans ses opérations, et le soin qu'il a donné en particulier aux analyses dont il s'agit, inspirent du moins beaucoup de confiance, et on peut regarder ses résultats comme ce que nous avons de plus positif dans l'état actuel de nos connaissances, en attendant que des expériences encore plus exactes aient éclairci tout les doutes.

M. Gay-Lussac a fait remarquer que dans la composition simple qu'il avait admise, et dont nous admettons nous

mêmes, d'après l'analyse de Berzelius 9 molécules sur 10 dans la composition du sucre, celui-ci peut se décomposer immédiatement en alcool, et acide carbonique, sans addition, ni perte : savoir le volume d'oxygène doit se décomposer en  $\frac{2}{3}$  de volume qui avec  $\frac{1}{3}$  de volume de gaz de carbone formera  $\frac{2}{3}$  de volume d'acide carbonique, et  $\frac{1}{3}$  de volume qui avec  $\frac{2}{3}$  de volume d'hydrogène formera l'eau, ou ses élémens qui se trouvent dans l'alcool, et dont le volume sera aussi  $\frac{2}{3}$ ; tandis que les autres  $\frac{2}{3}$  de volume de carbone et  $\frac{4}{3}$  de volume d'hydrogène formeront le gaz oléfiant qui entre aussi, ou ses élémens, dans l'alcool, et dont le volume sera encore  $\frac{2}{3}$ . Ainsi le sucre d'après cette composition pourrait être conçu lui même comme formé de volumes égaux d'acide carbonique, d'eau, et de gaz oléfiant, et la fermentation vineuse ne serait que la séparation du premier, qui laisserait les deux autres réunis sous forme d'alcool. Le sucre serait une espèce de *carbonate d'alcool*, qui laisserait échapper son acide, et se réduirait à sa base, par la fermentation. Mais quand même on admettrait la composition du sucre, selon l'analyse de Gay-Lussac, cette manière de la concevoir par la réunion de plusieurs composés binaires préexistans ne me semblerait pas plus probable, que celle analogue, qu'elle suppose pour l'alcool, et par les mêmes raisons que j'ai déjà alléguées en parlant de ce dernier. En effet on ne peut pas former d'avantage du sucre par la combinaison de l'acide carbonique avec l'alcool, qu'on ne peut former celui-ci par



L'union du gaz oléfiant, et de l'eau, et la fermentation alcoolique paraît être une opération plus compliquée que la simple séparation d'un acide d'avec une base. D'ailleurs la formation de ces composés binaires, d'où le sucre peut résulter, est aussi arbitraire, que celle relative à l'alcool. En effet la même considération des produits de la fermentation qui a suggérée celle dont on vient de parler, et qui se rapporte à la composition de l'alcool en gaz oléfiant et eau, a conduit M. Meinecke à une autre composition du sucre, d'après sa manière d'envisager la composition de l'alcool, dont nous avons parlé plus haut, savoir comme formée de 3 proportions d'hydrogène protocarburé, et 1 d'acide carbonique. Il observe que le sucre peut aussi, selon les proportions de Gay-Lussac, être considéré comme formé de 3 portions d'acide carbonique et 3 d'hydrogène protocarburé, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre; en sorte que la conversion du sucre en alcool se ferait par la seule séparation de 2 portions d'acide carbonique, une proportion seulement restant unie avec les 3 d'hydrogène protocarburé pour former l'alcool.

Mais ces rapprochemens, qu'on peut en général varier de plusieurs manières, ne prouvent rien sur la nature réelle de l'union des élémens dans les composés ternaires, et comme je l'ai dit plusieurs fois, le plus sûr dans l'état actuel de nos connaissances est de regarder les trois élémens comme réunis tous ensemble, sans autre supposition sur l'ordre de leur union que celles qui sont nécessaires



pour ramener ces composés à la théorie des multiples, ainsi que nous avons essayé de le faire.

Dans le cas du sucre, si l'on y admet les proportions plus simples de Gay-Lussac, quelle que soit la manière dont les élémens y sont assemblés, on pourra toujours concevoir qu'une partie de l'oxygène, et une partie du carbone s'en séparent dans la fermentation, dans la proportion convenable pour former l'acide carbonique, et laissent le reste uni avec l'hydrogène pour constituer l'alcool. Si on joint à la composition du sucre de M. Gay-Lussac la petite quantité de l'autre composé ternaire, qui en complique la composition, selon l'analyse de Berzelius, on peut supposer que ce composé se décompose, ou est converti en acide carbonique et en eau par l'addition de l'oxygène de l'atmosphère, tandis que l'autre se change en acide carbonique, et alcool; ou bien encore qu'il joue un rôle dans la fermentation, et en complique la nature d'une manière encore inconnue.

Selon l'analyse de Berzelius la gomme arabique est formée de 12 molécules d'oxygène, 13 carbone et 24 hydrogène. L'oxygène, et l'hydrogène sont ici dans la même proportion que dans l'eau, c'est-à-dire de 1 à 2; il n'y a que le rapport entre l'oxygène, et le carbone qui doit être ramené au multiple en prenant pour base l'oxygène. En appliquant d'après cela à ce composé notre formule du n.º 6, la composition devient

1	oxygène	2	carbone	2	hydrogène
11		11		22	

ou bien

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène

11 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

Le second composé est encore ici le même que le sucre ou la gomme de M. Gay-Lussac, et il entre même ici pour un plus grand nombre de molécules que dans le sucre de M. Berzelius ; mais la composition de l'autre composé ternaire qui en complique la composition totale est différente de celle du composé qui joue le même rôle dans le sucre ; il contient deux molécules seulement de carbone, et d'hydrogène pour une d'oxygène, au lieu que celui du sucre en contient trois.

L'amidon des pommes de terre est formé selon M. Berzelius de 6 molécules de oxygène, 7 carbone et 13 hydrogène. En appliquant ici notre formule du n.<sup>o</sup> 6, pour réduire cette composition au multiple par rapport à l'oxygène, on trouve

25 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

5 ( 1 oxygène 1 carbone 3 hydrogène )

5 ( 1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène )

1 ( 1 oxygène 2 carbone 3 hydrogène )

mais ce résultat est susceptible d'une grande simplification par une transposition entre les composés partiels, savoir en transportant les 5 molécules de carbone qui entrent dans le second composé dans le 3.<sup>e</sup>, et les 10 de celui-ci dans le second, ce qui n'en change pas le nombre total ; car alors le tableau de la composition devient

25 ( 1 oxigène 1 carbone 2 hydrogène )

5 ( 1 oxigène 2 carbone 3 hydrogène )

5 ( 1 oxigène 1 carbone 2 hydrogène )

1 ( 1 oxigène 2 carbone 3 hydrogène ) ;

savoir le premier et le 3.<sup>e</sup> composé deviennent identiques entre eux , et le second et le 4.<sup>e</sup> aussi identiques entre eux , et on a ainsi

30 ( 1 oxigène 1 carbone 2 hydrogène )

6 ( 1 oxigène 2 carbone 3 hydrogène )

qui se réduit à

1 ( 1 oxigène 2 carbone 3 hydrogène )

5 ( 1 oxigène 1 carbone 2 hydrogène )

résultat qu'on aurait pu aussi trouver aisément en considérant immédiatement la composition proposée. Le second de ces composés partiels est encore le même qui constitue le sucre de M. Gay-Lussac. Mais ce composé est ici joint dans la proportion de 5 molécules seulement à une molécule d'un autre composé ternaire , différent tant de celui qui entre dans la composition du sucre de M. Berzelius , que de celui propre à la gomme arabique , et contenant 2 molécules de carbone sur une d'oxigène comme celui de la gomme , et 3 molécules d'hydrogène sur une d'oxigène comme celui du sucre.

Le sucre de lait , selon l'analyse de M. Berzelius , aurait encore une composition analogue à celle des trois substances dont on vient de parler , mais s'écarterait un peu plus de celle que M. Gay-Lussac a attribuée en commun à

celles-ci. Il serait formé de 4 oxygène, 5 carbone, et 8 hydrogène en volume, et je trouve en réduisant au multiple que cela revient à

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène

3 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène );

le composé partiel qui constitue le sucre de Gay-Lussac n'entre ici que par trois molécules sur une de l'autre composé; ce dernier est d'ailleurs le même qui entre dans la composition de la gomme arabique, et l'hydrogène et l'oxygène y sont comme dans celle-ci dans la proportion qui forme l'eau (1).

12. L'acide acétique appartient encore à cette première classe des composés organiques ternaires, et même l'hydrogène et l'oxygène y seraient exactement dans la proportion qui forme l'eau, soit selon l'analyse de M. Berzelius, soit selon celle de M. Gay-Lussac; mais ces deux chimistes

(1) Je remarquerai ici que M. Prout, qui a aussi analysé le sucre ordinaire à l'occasion de son travail sur l'urine a trouvé un résultat qui serait plutôt favorable à la composition du sucre telle que l'admet M. Gay-Lussac, qu'à celle plus compliquée de Berzelius. Les analyses du sucre des diabètes et du sucre de lait donnèrent encore à cet auteur des résultats peu différens; il considère en conséquence le principe sucré simple comme ayant la composition indiquée par Gay-Lussac, et les petites différences entre une espèce de sucre et l'autre, comme analogues à celles qui distinguent l'arragonite de la chaux carbonatée ordinaire; mais ces différences, quelle qu'en soit l'étendue, pourront être ramenées à la théorie des proportions déterminées multiples par les procédés que nous avons indiqués.

ne sont pas d'accord sur la proportion du carbone relativement à ces deux élémens. D'après l'analyse de Berzelius cet acide est composé de 3 oxygène, 4 carbone, 6 hydrogène en volume, et je trouve que cette composition reduite à la théorie des multiples revient à

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène

2 ( 1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène )

Le second composé est encore le sucre de M. Gay-Lussac, et le premier est le même que celui du sucre de lait, et de la gomme arabique, substances dont l'acide acétique ne différerait ainsi que par la proportion différente entre ces deux composés partiels, le sucre de Gay-Lussac n'y entrant que pour deux molécules sur une de l'autre composé, au lieu qu'il entre pour trois molécules dans le sucre de lait, et pour 11 molécules dans la gomme. Selon l'analyse de M. Gay-Lussac la composition de l'acide acétique serait 2 oxygène 3 carbone 4 hydrogène, et il est facile de voir qu'on la représente, reduite au multiple, par

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène

1 oxygène 1 carbone 2 hydrogène.

Ce sont les mêmes composés partiels que selon celle de M. Berzelius, mais ils sont unis molécule à molécule au lieu de deux molécules de l'un sur une de l'autre.

Si la composition de l'acide acétique est réellement conforme à l'une ou à l'autre de ces deux analyses, on peut supposer que le premier composé partiel, où le carbone est plus abondant, est celui d'où dépend son acidité, l'autre



composé ternaire, qui ferait fonction de base, n'étant pas en quantité suffisante pour le neutraliser, tandis que ce même principe acide est parfaitement neutralisé par une quantité plus grande de la même base dans le sucre de lait, et la gomme. Le sucre de cannes, et l'amidon auraient une composition analogue à ces deux dernières substances, et avec la même base; mais le principe acide y aurait une composition différente.

Il est remarquable que la composition de ce principe acide que nous supposons dans l'acide acétique, et dans le sucre de lait combiné avec une base commune, se retrouve dans un acide libre, savoir dans l'acide gallique, selon l'analyse que M. Berzelius en a donné, en sorte que cet acide appartiendrait encore aux substances où l'oxygène et l'hydrogène sont dans la proportion nécessaire pour former de l'eau; Berzelius a en effet trouvé cet acide composé de

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène,

composition immédiatement multiple, et qui est la même que celle du principe dont nous venons de parler. Ainsi, d'après ces analyses, et ces considérations, le sucre de lait, et la gomme seraient des espèces de gallates ayant pour base commune le composé ternaire qui constitue le sucre de Gay-Lussac, et l'acide acétique même serait encore un gallate de la même base, avec excès d'acide. Mais l'incertitude des analyses mêmes rend aussi ces résultats douteux.

13. Les autres acides végétaux, selon les analyses qu'on



en a jusqu'ici, paraissent en général contenir le gaz oxigène dans une plus grande proportion que celle qui serait nécessaire pour former de l'eau avec l'hydrogène qui entre dans leur composition, et forment ainsi la seconde classe des composés ternaires organiques, conformément à la remarque que M. Gay-Lussac en avait fait depuis long-temps. Mais il règne encore beaucoup d'incertitude dans la composition précise, particulière à chacun d'eux. Je n'en apporterai pour exemple que l'acide citrique. Selon l'analyse de M. Berzelius la composition de cet acide serait fort-simple; il serait formé d'une molécule de chacun de ses trois élémens. Le rapport entre le carbone, et l'hydrogène serait d'après cela le même que dans l'acide gallique, savoir de volume égal, et ces deux acides ne différeraient que par le degré d'oxigénation de ce radical composé, l'oxigène entrant pour un demi volume seulement dans l'acide gallique, et pour un volume entier dans l'acide citrique. Mais d'après les proportions en poids que M. Gay-Lussac attribue aux élémens de l'acide citrique, selon son analyse, on trouve qu'il serait formé de 3 carbone, 4 oxigène et 6 hydrogène en volume. Cette composition réduite au multiple revient, en prenant pour base le carbone, qui est ici la substance qui entre en moindre volume, à

1 carbone 2 oxigène 2 hydrogène

2 ( 1 carbone 1 oxigène 2 hydrogène )

Le second composé partiel, qui entre pour deux molécules est encore ici le sucre de Gay-Lussac; mais le premier,

auquel en admettant cette composition on devrait attribuer l'acidité, différerait de celui qui entre dans la composition de l'acide acétique, en ce que l'oxygène serait dans celui de l'acide citrique en volume double du carbone, au lieu que dans celui de l'acide acétique c'était au contraire le carbone qui était en volume double de celui de l'oxygène. Au reste la composition simple qui résulte de l'analyse de Berzelius paraît la plus probable, et peut être celle même de l'acide acétique devrait elle être corrigée de manière à offrir un composé ternaire immédiatement multiple, comme l'acide gallique, et l'acide citrique de Berzelius.

J'observerai encore ici, qu'en admettant cette composition simple de l'acide citrique selon Berzelius, le tannin des noix de galles, substance qui paraît faire à quelques égards les fonctions d'un acide, serait, selon l'analyse des mêmes chimistes, un composé d'acide gallique, et d'acide citrique unis molécule à molécule. En effet M. Berzelius a trouvé cette substance composée de 2 oxygène, 3 carbone, 3 hydrogène, ce qui réduisant en multiple donne

1 oxygène 2 carbone 2 hydrogène

1 oxygène 1 carbone 1 hydrogène,

le premier de ces composés partiels est, comme on voit, l'acide gallique de M. Berzelius, et le second, son acide citrique.

Les analyses connues des autres acides végétaux fourniraient des considérations et des relations analogues; mais comme je l'ai déjà remarqué, elles seraient prématurées

dans l'état actuel de nos connaissances ; l'application au reste de nos procédés de réduction à la théorie des multiples à ces composés sera toujours facile, dès qu'on aura des analyses, sur l'exactitude rigoureuse desquelles on puisse compter.

14. La véritable composition des composés ternaires de la 3.<sup>e</sup> classe, où l'hydrogène est en excès, comme les huiles fixes, les résines, et les bitumes paraît encore plus obscure que celle des substances précédentes. Il est d'abord difficile quant aux huiles fixes d'opérer sur des substances parfaitement homogènes : on sait en effet, d'après les expériences de M. Chevreul, que les huiles sont en général un mélange ou une solution de deux huiles différentes pour chacune d'elles, dont l'une fluide ou se figeant plus difficilement, l'autre concrète à la température ordinaire ; M. Chevreul a appelé la première sorte d'huiles composantes *élaïnes*, et la seconde *stéarines* ; ainsi les analyses des huiles fixes dans leur ensemble, sans distinction de ces huiles composantes, ne peuvent servir à établir leur véritable composition en molécules, et même dans les analyses où l'on a eu soin de faire cette séparation, on n'est jamais bien sur qu'elle ait été faite exactement, et enfin les inexactitudes qui peuvent s'être glissées dans les analyses mêmes, peuvent changer entièrement les idées qu'on pourrait se faire de la composition de ces huiles ; et les résultats des différens chimistes sur l'analyse de la même substance peuvent conduire à des conséquences très-différentes. J'apporterai pour exemple de

ces différences l'analyse de la cire, substance qui paraît devoir être assez homogène, d'un côté par MM. Gay-Lussac et Thenard, de l'autre par M. Th. de Saussure. Le résultat de MM. Gay-Lussac et Thenard, réduit par M. Gay-Lussac même en volumes (ann. de chimie et de phys. Juillet 1817), est le suivant, en réduisant à moitié le volume du gaz de carbone, d'après notre évaluation de la densité de ce gaz ;

oxygène 25, carbone 500, hydrogène 880

cette composition peut s'exprimer plus simplement, en faisant une petite altération au volume de l'hydrogène, par

1 oxygène 20 carbone 35 hydrogène,

composition immédiatement multiple par rapport à l'oxygène. Selon l'analyse de M. de Saussure l'hydrogène serait un peu plus abondant par rapport au carbone, en sorte qu'il approcherait du rapport de 2 à 1 qui constitue le gaz oléfiant ; mais ce qui est surtout plus important, le volume du carbone au lieu d'être seulement 20 fois celui de l'oxygène, approche d'être 25 fois ce volume. La délicatesse de ces analyses provient de la petite dose d'oxygène, en sorte qu'une petite erreur commise sur cette quantité change entièrement le rapport de cet élément aux autres. Tout ce qu'on peut conclure des analyses des huiles fixes faites jusqu'ici est qu'elles contiennent par rapport au carbone une dose d'hydrogène à peu près comprise entre 1 et 2, et en outre une fort-petite quantité d'oxygène, qui réunissant avec soi une quantité considérable de molécules des

deux autres substances, et augmentant par là la grosseur de la molécule totale, est probablement la cause de la fixité de ces huiles. Mais de savoir quelle est la proportion précise du carbone et de l'hydrogène entre eux, et de l'oxygène aux deux autres élémens dans chaque huile particulière, et qu'est ce qui rend ces huiles en général plus ou moins fixes, plus ou moins fluides ou concrètes, ce sont là des questions que nous ne pouvons résoudre dans l'état actuel de l'analyse de ces substances. Je remarquerai seulement qu'il paraîtrait par les analyses que M. de Saussure a faites séparément de quelques espèces d'élaines, et de stéarines, que dans les élaines la proportion du carbone à l'hydrogène approcherait de 1 à 2, et dans les stéarines de 2 à 3.

Ce que j'ai dit sur la grande influence des erreurs des expériences sur la quantité d'oxygène relativement aux huiles fixes peut également s'appliquer aux résines, et aux bitumes, ces substances paraissant aussi contenir en général une petite quantité d'oxygène par rapport au carbone et à l'hydrogène. Aussi les analyses de différens auteurs nous conduisent-elles à des résultats très-différens sur la composition d'une même espèce de ces substances. Par exemple dans la résine de Térébenthine le rapport du carbone à l'hydrogène en volume est à peu près de 2 à 3 ou 1 à  $1\frac{1}{2}$ , soit selon l'analyse de MM. Gay-Lussac et Thénard, soit selon celle de M. de Saussure; mais selon la première le rapport de l'oxygène au carbone est à très-peu-près de 1 à 8, et



selon la seconde de 1 à 22. D'après de si grands écarts il est clair qu'on ne peut déterminer avec quelque probabilité, et même seulement par approximation ni les différences essentielles de composition entre une espèce et l'autre de ces substances, ni ce qui les distingue en général des huiles fixes soit fluides, soit concrètes.

Nous ne nous arrêterons donc pas d'avantage à des considérations particulières sur ces différents composés, et nous passerons à dire quelque chose sur la possibilité de réduire à la théorie des combinaisons multiples les composés quaternaires, en les considérant immédiatement comme tels, par une marche analogue à celle que nous avons suivie pour les composés ternaires.

15. Cette réduction ne peut souffrir de difficulté, en prenant pour base la substance qui entre en moindre volume, ou en moindre nombre de molécules dans les composés quaternaires, après ce que nous avons dit à cet égard sur les composés ternaires. Il suffit d'observer qu'un composé quaternaire peut être considéré comme résultant de l'union d'une substance simple avec un composé ternaire, de même qu'un composé ternaire résulte de l'union d'une substance simple à un composé binaire; car d'après cela en opérant par rapport à l'union de la 4.<sup>e</sup> substance simple comme nous avons opéré par rapport à l'union de la 3.<sup>e</sup>, il est clair qu'on parviendra toujours à représenter la composition quaternaire quelle qu'elle soit par la réunion de deux ou plusieurs composés quaternaires partiels, multiples



en eux mêmes par rapport à leur base, et de l'un des quels les autres composés quaternaires seront aussi des multiples; il ne faudra que multiplier suffisamment le nombre des molécules du composé total, sans en changer les rapports. Je me dispenserai donc de développer en formule générale le procédé à suivre dans ce cas, comme on pourrait le faire aisément d'après ce que je viens de dire.

Quant à la possibilité de représenter aussi ces combinaisons quaternaires sous une forme telle qu'on puisse prendre pour base telle des quatre substances composantes que l'on voudra, sans qu'elles cessent d'être multiples par rapport à cette substance, c'est une suite évidente de ce qu'on peut toujours par la règle ordinaire réduire à des rapports multiples les rapports quels qu'ils soient entre deux quelconques de ces élémens: car supposons que les nombres entiers les plus petits par lesquels on puisse exprimer les quantités relatives des quatre élémens dans le composé soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , dans l'ordre de leur grandeur, en commençant par le plus petit, il est clair d'après cela que  $b$  pourra être considéré comme multiple par rapport à  $a$ ,  $c$  par rapport à  $b$ , et  $d$  par rapport à  $c$ . Ainsi pourvu qu'on prenne un nombre suffisamment grand pour représenter  $a$ , cet élément pourra être considéré comme s'adjoignant le nombre convenable de molécules de la substance à laquelle  $b$  appartient, celles-ci comme portant avec elles le nombre convenable de molécules de l'espèce  $c$ , et ces dernières enfin comme portant encore avec elles un nombre convenable

de molécules de l'espèce  $d$ , et on trouvera aisément quels sont les nombres de molécules de chacune de ces substances qu'il faut prendre pour cela, en opérant d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour les composés ternaires. Je ne crois donc pas nécessaire non plus d'allonger ce mémoire par le développement des formules générales qu'on pourrait aussi établir pour cet objet.

Je me bornerai donc à faire ici quelques applications de ces principes, relatives aux composés quaternaires organiques les plus connus, dont je chercherai à établir la composition sous ce point de vue, du moins telle qu'elle résulte des analyses que nous en avons jusqu'ici. Je me contenterai même de rapporter cette composition à la substance qui y entre en moindre volume, ainsi que je l'ai déjà pratiqué dans les composés ternaires particuliers que j'ai examiné ci-dessus, puisque c'est réellement ce qui intéresse la théorie des proportions déterminées, les inversions que nous avons montré pouvoir se faire, relativement à l'un quelconque des composans pris pour base, étant pour ainsi dire étrangères à cette théorie, et ne tendant qu'à rendre plus régulière la disposition systématique des composés, et leur nomenclature.

16. Nous nous servirons principalement pour cet objet des analyses de MM. Gay-Lussac et Thénard, dont M. Gay-Lussac a réduit lui-même les résultats en volumes dans les *Annales de chimie et de physique* juillet 1817, en réduisant à l'ordinaire à la moitié le volume de la vapeur du

carbone, d'après la supposition différente que nous suivons sur la densité de cette vapeur. Elles regardent la fibrine, le caseum, l'albumine et la gélatine: MM. Gay-Lussac et Thénard étaient portés à croire d'après leurs analyses que ces substances contenaient toutes une quantité d'hydrogène précisément suffisante pour former de l'eau avec leur oxygène, et de l'ammoniaque avec leur azote, en sorte qu'on pût les regarder comme des composés d'eau, d'ammoniaque, et de carbone en différentes proportions; cependant on verra que ces analyses mêmes ne satisfont pas toutes exactement à cette condition, que rien ne nous oblige d'admettre en les considérant comme des composés immédiatement quaternaires.

Commençons par la fibrine. Sa composition, telle qu'elle résulte immédiatement de l'analyse réduite en volumes, est

Carbone 500, azote 160, hydrogène 748, oxygène 140  
qui revient à très-peu-près à

Carbone 50, azote 16, hydrogène 75, oxygène 14.

Mais il paraît que d'après le degré d'exactitude que ces sortes d'analyses comportent, on peut simplifier beaucoup cette composition, en supposant le volume de l'azote et celui de l'oxygène égaux l'un et l'autre à 15, et alors elle se réduit, en divisant tous les nombres par 5 à

Carbone 10, azote 3, hydrogène 15, oxygène 3;  
alors les 3 azote devraient prendre 9 hydrogène pour former de l'ammoniaque, et les 3 d'oxygène 6 d'hydrogène pour former de l'eau; or  $9+6=15$ , en sorte que la relation

annoncée par Gay-Lussac se vérifierait. En considérant ce composé comme immédiatement quaternaire j'observerai qu'on pourrait en rendre la combinaison immédiatement multiple par une petite altération, savoir en substituant 9 au lieu de 10 pour la quantité de carbone; car alors en divisant par 3 on aurait

Carbone 3, azote 1, hydrogène 5, oxygène 1, composition multiple soit par rapport à l'azote, soit par rapport à l'oxygène. Mais comme ce changement pourrait paraître trop fort, tenons nous-en à la composition précédente, et cherchons à la ramener à la théorie des combinaisons multiples par nos procédés. Prenons l'oxygène pour base; puisque l'hydrogène et l'azote sont déjà multiples par rapport à lui, il ne s'agit que de prendre un nombre de molécules suffisant pour satisfaire au rapport de 3 à 10 entre l'oxygène, et le carbone. Ce rapport revient à celui de 1 à  $3\frac{1}{3}$ , et on y satisferait dans une combinaison binaire par

2 ( 1 oxygène 3 carbone )

1 ( 1 oxygène 4 carbone ).

Il ne faudra donc que prendre 3 molécules d'oxygène chacune avec leur proportion des autres éléments, et dont 2 soient en outre combinées avec 3 carbone, et une avec 4 carbone. La composition devient ainsi

2 ( 1 oxygène 1 azote 5 hydrogène 3 carbone )

1 ( 1 oxygène 1 azote 5 hydrogène 4 carbone );

le premier composé partiel est le même qui serait résulté

de la simplification dont nous avons parlé; le second en complique la composition; c'est aux expériences ultérieures à décider si cette complication a lieu en nature.

Passons au caseum. Le résultat immédiat de son analyse a donné en volume

carbone 500, azote 153, hydrogène 706, oxygène 72  
ou à très-peu-près

carbone 50, azote 15, hydrogène 71, oxygène 7.

Il est facile de voir que l'hydrogène est ici en excès sur la quantité qui serait nécessaire pour former de l'ammoniaque et de l'eau, et d'après l'analogie avec la composition de la fibrine il paraît naturel de porter le nombre de l'oxygène à  $7\frac{1}{2}$  qui est la moitié de 15, et le nombre 71 à 75 comme dans la fibrine: par là la composition du caseum vient à ne différer de celle de la fibrine que parce qu'il n'y a que la moitié de l'oxygène, ou le double des autres substances par rapport à l'oxygène, et elle se trouve être

20 carbone 6 azote 30 hydrogène 3 oxygène,

ou en réduisant au multiple, par rapport à l'oxygène

2 ( 1 oxygène 2 azote 10 hydrogène 6 carbone )

1 ( 1 oxygène 2 azote 10 hydrogène 8 carbone );

on pourrait faire à cette composition une simplification analogue à celle dont nous avons parlé pour la fibrine, en supprimant le second composé partiel, si l'on croyait que l'exactitude que ces analyses comportent pût le permettre.

L'analyse de l'albumine a donné immédiatement en volume



Carbone 500, azote 127, hydrogène 810, oxygène 170  
nombres auxquels on peut substituer par approximation  
carbone 12, azote 3, hydrogène 18, oxygène 4.

La relation annoncée par Gay-Lussac s'y vérifierait si l'on mettait 17 au lieu de 18 pour l'hydrogène ; mais en considérant ce composé comme immédiatement quaternaire cela ne ferait qu'en compliquer la composition. En le supposant tel que nous venons de le présenter, et prenant pour base l'azote qui entre ici en moindre proportion, il n'y a que l'oxygène qui ne soit pas multiple par rapport à lui, et en suivant le procédé ordinaire il est facile de voir que la composition réduite au multiple sera (1)

2 ( 1 azote 4 carbone 6 hydrogène 1 oxygène )

1 ( 1 azote 4 carbone 6 hydrogène 2 oxygène ).

Enfin la gélatine a donné en volume, par son analyse  
carbone 500, azote 152, hydrogène 959, oxygène 214  
ou à très-peu-près

carbone 500, azote 150, hydrogène 950, oxygène 200  
ou bien

carbone 10, azote 3, hydrogène 19, oxygène 4.

---

(1) MM. Prévost et Dumas dans leur *examen du sang etc.* publié dernièrement dans la *Bibliothèque universelle* ont émis l'opinion que l'albumine n'est qu'une combinaison de fibrine, et de soude, et que la différence de composition entre la fibrine, et l'albumine, signalée par MM. Gay-Lussac et Thénard, est due à ce qu'ils n'ont pas tenu compte de l'acide carbonique retenu par la soude ; mais il faudra attendre le détail qu'ils promettent de leurs expériences sur cette substance, pour juger de la probabilité de cette assertion.



Mais il paraît qu'on peut bien mettre 18 au lieu de 19 pour l'hydrogène pour avoir un nombre multiple par rapport à l'azote ( au lieu que la relation annoncée par Gay-Lussac et Thénard exigerait 17 ), et alors il reste à ramener au multiple par nos procédés le carbone, et l'oxygène : en les y appliquant, je trouve

4 ( 1 azote 6 hydrogène 1 oxygène 3 carbone )

2 ( 1 azote 6 hydrogène 1 oxygène 4 carbone )

2 ( 1 azote 6 hydrogène 2 oxygène 3 carbone )

1 ( 1 azote 6 hydrogène 2 oxygène 4 carbone )

Le second et le 4.<sup>e</sup> de ces composés partiels sont les mêmes qui constituent l'albumine, et dans la même proportion ; mais la composition de la gélatine est compliquée par l'addition de deux autres composés partiels, savoir le premier et le 3.<sup>e</sup> qui diffèrent respectivement de ces composés là par le nombre 3 du carbone au lieu de 4.

J'ajouterai encore quelque remarque sur une autre substance appartenante à la classe des composés quaternaires non acides, l'urée. Nous en avons deux analyses, l'une de M. Bérard, l'autre de M. Prout. D'après la première, selon l'évaluation en volumes, faite par M. Gay-Lussac dans l'endroit cité des annales de chimie et de physique, la proportion des élémens y serait à très-peu-près 1 carbone 2 azote 6 hydrogène 1 oxygène. On voit qu'on peut représenter cette composition, ainsi que M. Gay-Lussac l'a remarqué par une combinaison d'ammoniaque, et d'oxide de carbone; car la quantité d'hydrogène n'y est pas d'ailleurs

suffisante pour former de l'ammoniaque avec l'azote, et de l'eau avec l'oxygène, puisqu'en formant le premier composé il n'en reste plus rien pour le second. En considérant l'urée comme un composé immédiatement quaternaire, on voit qu'il est multiple tant par rapport au carbone, que par rapport à l'oxygène. L'analyse de l'urée par M. Prout donnerait selon nos évaluations 1 carbone 2 azote 4 hydrogène 1 oxygène: elle est encore multiple par rapport au carbone et à l'oxygène, et ne diffère de celle de Bérard que par le volume 4 de l'hydrogène au lieu de 6. C'est à des expériences ultérieures à décider quelle est la véritable composition.

17. Le seul acide animal quaternaire que nous connaissons d'une manière un peu précise (1) est l'*acide urique*, puisque l'acide hydrocyanique, dont nous avons déjà parlé dans le mémoire précédent n'est que ternaire (2). Nous avons aussi deux analyses différentes de cet acide, par les mêmes chimistes Bérard et Prout. Selon l'analyse de M. Bérard, calculée en volumes par Gay-Lussac, et toujours avec

---

(1) L'acide purpurique de Prout ou acide erythrique de Brugnatelli offre encore trop de points de contestation pour qu'on puisse compter sur l'analyse que Prout en a donnée. L'acide pyro-urique de MM. Chevalier et Lassaigue est encore peu connu.

(2) Par des travaux dont je n'ai eu connaissance qu'après la lecture de mon mémoire cité, M. Berzelius a trouvé que le *cyanogène sulfuré* présente un composé absolument analogue aux acides hydrocyanique, et chlorocyanique, étant formé de volumes égaux de chacun de ses éléments.

le changement ordinaire par rapport au carbone, sa composition serait 2 carbone 2 azote 5 hydrogène 1 oxygène. Selon celle de Prout il y aurait seulement 2 hydrogène au lieu de 5, c'est-à-dire que l'hydrogène serait égal en volume tant au carbone qu'à l'azote. L'égalité de volume entre le carbone et l'azote, qui est indiquée par les deux analyses, proportion qui est la même qui forme le gaz cyanogène, avait déjà été annoncée par M. Gay-Lussac; il s'y joint de plus, selon l'une et l'autre analyse pour former l'acide urique, un volume d'oxygène égal à la moitié de celui de ces deux élémens, et un volume d'hydrogène qui selon l'analyse de Bérard serait à ceux du carbone et de l'azote comme 5 à 2, et selon celle de Prout simplement égal à ceux-là, et ainsi le même que dans l'acide hydrocyanique, en sorte que selon cette dernière analyse l'acide urique pourrait être considéré comme de l'acide hydrocyanique joint à un volume d'oxygène égal à la moitié de celui de chacun de ses élémens, ou comme du cyanogène, qui au lieu d'être uni simplement avec un volume d'hydrogène, y joindrait encore l'oxygène qui serait nécessaire pour former de l'eau avec cet hydrogène. Il faut avouer, que l'analyse de Prout a au moins en sa faveur le degré de probabilité qui peut dépendre d'une plus grande simplicité. Au reste les deux compositions sont toutes deux immédiatement multiples relativement à l'oxygène, et ne présentent aucune difficulté dans la théorie des proportions

déterminées, lorsqu'on les considère comme immédiatement quaternaires.

Je remarquerai encore ici que d'après l'analyse de Prout l'acide urique aurait une composition analogue à celle que M. Berzelius a trouvé par ses derniers travaux à l'*acide hydrocyanique sulfuré*, si ce n'est que le soufre qui y remplace l'oxygène entre pour un volume égal à celui de chacun des trois autres élémens, au lieu de n'y entrer que pour un demi volume.

## AD VERBASCUM CISALPINUM

A CL. MEDICO JOANNE BIROLI NOVARIENSI

DESCRIPTUM

ALOYSII COLLA

## OBSERVATIONES

*Lectae die 6 januarii 1822.*

**T**anti valet ad augendam naturae scientiam veritatem deprehendere, quanti errorem detegere. Huic innixus principio, cum viderim dubitationi subjectum a Cl. Joanne BIROLI in hoc Regio Athenaeo materiei medicae et botanices paucis ab hinc annis Professore, quid sub nomine *Verbasci phae-nicei* intelligant hodierni Botanici, «an scilicet species a divo » LINNEO descripta eadem sit, ac illa, quam praesides Pede- » montani ALLIONIUS, BELLARDI, et BALBIS inter incolas hujus » ditionis commemorarunt tamquam uberrime proveniente » in pascuis siccis, et ericetis (1) »; cum insuper viderim el. Auctorem, ex comparatione inter characteres memoratae

---

(1) Verbas. cisalp. BIROLI pag. 1.

speciei a LINNEO, aliisque egregiis Botanicis tributos, illosque ab ipsomet perpensos in incola planta suspicatum fuisse » *V. phaeniceum* L. minime colere ditionem pedemontana- » nam, et distinguendum esse nostrum nomine *V. cisalpini*, » quod a basi Alpium ad Ticinum usque in pascuis siccis, » et praesertim ericetis crescit » (1); cum denique idem cl. vir iconem, et descriptionem addiderit; ut *judicent Botanici an acceptandum, an rejiciendum* (2); operae praetium duxi nonnullas observationes summis viris sub- mittere, ut noscant num veritas deprehensa fuerit, an po- tius error sit detegendus.

Differentiae, quas cl. BIROLI agnovit in characteribus spe- cificis totae in eo sistunt, quod in *Verbasco* LINNEI folia sint *nuda*, caulis *subnudus ramosus*; in nostro folia *pi- losa*, caulisque *pilis obsitus*, et semper *simplex* (3).

Praetium hisce notistribuendum, praesertim in *Verba- sco*, videbimus: interea diligenter perpendendi *characteres* tam a LINNEO, quam ab aliis celebrioribus Botanicis *V. phaeniceo* adscripti; icones inspiciendae; *specimina* exqui- renda.

#### CHARACTERES.

LINNEUS in *hort. Cliff.* p. 55 inter *Verbasci* species re- fert *Blattariam purpuream* BAUN. Pin. 241, et sequentes

(1) Ibid. p. 2. vers. *ab expositis*.

(2) Ibid.

(3) Ibid. p. 1. vers. *Praesides Botanici*.



addit synonymias *Blattaria flore caeruleo et purpureo*; BAUH. hist. 3. 875. *Blattaria perennis flore violaceo* MORIS. hist. 2. p. 488.

Ex characteribus a BAUMINIUS, et MORISONIO allatis nil certi deduci potest. CASP. BAUH. in *Pin.* 241. non adnotat folia, nec caulem; monet tantum hanc *Blattariam* esse *flore subcaeruleo aut carnei coloris, aut dilatiore purpura nitente, interdum saturatius rubente*, unde *purpuream* appellavit.

I. BAUH. in *hist.* 3. 875 nullos characteres específicos refert; ait tamen: *et hanc vocamus Blattariam flore phae-niceo*: addit iconem valde mancā, ex qua folia radicalia videntur *nuda*, caulina autem, et ipse caulis *villosus*: apparent etiam *rami*, sed ex *axillis infimis*, quod notandum, ut sequentibus descriptionibus lumen afferatur.

MORISONIUS hanc plantam ita describit: « *Blattaria flore*  
» *caeruleo vel purpureo folia multa habet per terram strata*,  
» *mediocriter lata, viridia, absque serratura ulla in*  
» *marginē, ex quorum medio oriuntur caules plures cu-*  
» *bitales a media parte fere sursum versus ornantur flori-*  
» *bus etc.* » MORIS. *hist.* 2 p. 488. Tradit insuper figuram  
t. 9. sect. 5. fig. 1 quam cl. BIROLI admittit *proximam*  
*Verbascum* ab ipso descripto (1), quae tamen omnimodo im-  
perfecta ab omnibus Botanicis censetur.

---

(1) Ibid. p. 1. vers. cl. MORISONIUS.

Ex hisce mancis descriptionibus, iconibusque, LINNEUS, qui fortasse tunc plantam ante oculos non habuerat, nil mirum, si sequentem phrasim eruerit *Verbascum foliis ovatis crenatis nudis scabris, caule ramoso*: Hort. Cliff. 55.

Sed de LINNEI phrasi in Hort. Cliff. ne verbum quidem apud cl. BIROLI. Phrasis, quam desumit a systemate vegetabilium ejusdem LINNEI, non fuit a nostro auctore accurate tradita: LINNEUS enim: *foliis ovatis nudis crenatis radicalibus, caule subnudo racemoso*: ita in *syst. veget. edit. Lindb. an 1770 vol. 3 p. 169*, nec non in *edit. 15 curante MURRAY. Paris. 1798, pag. 179*, et in aliis. BIROLI autem scripsit: *foliis nudis crenatis, radicalibus, caule subnudo ramoso* (1).

Supposito, ut fieri debet, adjectivo *ramoso* alteri *racemoso*, demta videtur praecipua ratio differentiae ab illo detecta.

At, quam Auctor praeterit, LINNEUS subjungit descriptionem hisce verbis: « Folia radicalia ovata, subsessilia, nuda, laevia, rugosa, vix crenata. Caulis erectus, *simplex*, bipedalis. Rami ex alis infimis erecti *simplices* longitudine caulis, omnes angulati *subpubescentes pilis apice viscidis, etc.*

Ergo excludit LINNEUS caulem, quem *simplicem* vocat, esse *ramosum*, uti errore ductus a BAUHINII, et MORISONIO

---

(1) Ibid. p. 1. vers. *Divus LINNEUS*.

in *hort. Cliff.* posuerat. Rami autem *ex alis*, seu axillis *infimis* ad caulem non pertinent: sic cl. BIROLI eorum non meminit.

Etiā TOURNEFORTIUS p. 148 inter *Blattariae* species *purpuream* recensuerat, sed descriptionem omiserat, et ad BAUHINIOS, ac LOBELIUM *Icon.* 565 se se retulerat.

Idem fecerat RAYUS in *hist. plant. vol. 2, p. 1096*; addidit insuper hasce notiones: « *Blattaria* flore caeruleo, vel » *purpureo* . . . foliis per terram expansis ad *Conyzam* » *Mathioli* minorem accedit, non tamen *ita villosa* sunt ... » *Parkinsonio* folia latiora sunt quam *Blattariae luteae* » (*Verbascum Blattaria* LIN.) *magis canescentia*, paucis » aut nullis per margines serraturis etc.

De caule nihil dixit: sed comparatio inter *V. phoeniceum*, *V. Blattaria*, et *Conyzam Mathioli* ratione foliorum superficiei, non leve praebet argumentum, primam speciem haud semper gerere folia *nuda*, dum RAYUS asserit esse *minus villosa* quam in *Conyza Mathioli*, *Parkinsonius* autem teste RAYO esse *magis canescentia* quam in *V. Blattaria*.

Cl. SCOPOLI in *flor. carniolica* edit. 2, n. 250 *V. phoeniceum* recensendo memorat etiam LINNEUM, et BAUHINIOS loco citato; asserit caulem esse angulatum; non adnotat utrum ramosus an simplex; folia tacet radicalia; caulina *subvillosa* esse dicit.

Post LINNEUM JACQUINIUS accurate descripsit *V. phoeniceum* in *flor. austr.*, quod cl. BIROLI admisit *nostro aideo*

*proximum* (1): revera ille declarat caulem gignere *angulatum erectum fillosum simplicissimum*, qui characteres perfecte conveniunt descriptioni, et iconi a BIROLIO tributis: addit utique JACQUINIUS *FEL RAMIS AUCTUM*, quod equidem indicat hanc speciem aliquando ramos gerere forsitan *ex alis infimis* uti notaverat LINNEUS, et ab imperfecta BAUMINI icone eruitur, ceu supra observavi, sed neuliquam probat caulem esse *ramosum*.

Caeterum quandoque ramosa esse potest planta, quum adhuc tenella, vel ab animalibus erosa, vel ab aliqua causa versus basim laesa fuit, ut in *V. Thapso* adeo frequens contingit.

Quidquid autem de hac re sit, haud dubium videtur JACQUINI plantam eandem esse, ac *V. phoeniceum* LINNEI ab eo laudati (2), ita ut in posteriore editione systematis vegetabilium LINNEI *Paris. 1798, p. 179 curante MURRAY*, hic se se referat ad JACQUINIUM *flor. aust. vol. 2, t. 125*. Et cum firmiter ab eximiis hisce Botanicis admittantur synonymiae BAUMINIORUM, LOBELII, et MORISONII, pro certo habendum semper de eadem planta locutos fuisse, nec credidisse hanc praeseferre constanter folia *nuda*, caulemque *ramosum*: quod esset probandum firmissimis exemplis, et potissimum experimentis actis ope iteratae seminationis, ad

(1) Ibid. p. 1. vers. cl. JACQUIN.

(2) JACQUINIUS citat LINNEUM *syst. pag. 169* quod cum nostra edit. Vindobonae anni 1770 supra citata, omnimodo quadrat.

constituendam speciem ab illa distinctam ratione foliorum *superficie*, et caulis *simplicitatis*.

Hoc posito videamus quid senserit celeberrimus ALLIONIUS noster, cujus vestigia a clarissimis Botanicis Pedemontanis BELLARDIO, et BALBISIO secuta et venerata fuere. Ille in *flor. pedem. tom. 1, pag. 106* refert phrasim LINNEI *syst. veget.*; admittit synonymias BAUHINIORUM, et JACQUINI; affert iconem Taurinensem *vol. II. tab. 101*, quae a cl. BIROLIO laudatur, quamque diligenter consului in Bibliotheca R. Athenaei Taurinensis; denique stationes notat hoc modo:  
 « in collibus aridis apricis Montisferrati, et Astensis Provinciae frequens: in colle Taurinensi *Superga* dicto, et  
 » circa *Seguvium* quoque nascitur: legit LAURENTIUS TER-  
 » RANEUS in agro *Montiscalerii* prope villam *Monachorum*  
 » *S. Bernardi*: cl. RICHERIUS misit collectam in collibus  
 » oppidi *La Morra*: cl. BELLARDI in ericetis canapiciensibus  
 » non infrequentem esse observavit (1).

Nunc *icones* inspiciamus, specimina exquiramus.

#### *ICONES, et SPECIMINA.*

Jam vidimus figuram a BAUH. *hist.* 875 esse admodum imperfectam; eruitur tamen caulem esse *villosum*, et ramos ex *infimis alis*.

Figuram a MORISONIO traditam quam mancarn vidimus V.

(1) Cl. BALBIS in pascuis *delli Molinetti*, tum etiam supra *Superga* alibique commemorat in *Fl. Taur. pag. 40*.

*cisalpino* BIROLI magis proximam esse, auctorem ipsum fateri observavimus.

Modo cum figuris a LOBELIO et JACQUINIO, quarum meminit BIROLI (1), cum Icone Taurinense supra laudata, nec non cum speciminibus siccis comparemus.

LOBELII planta, quam a ditione Pedemontana provenientem asserit, magis accedit ad Iconem Taurinensem, exceptis in hac foliis *subglabris*, et caule *ramum* unicum ferente ex *axillis infimis*, quae nota tamquam accidentalis ab accuratissimo ALLONIO habetur, dum caulem non indicat *ramosum*, quamvis ad eandem iconem confugiat.

Figura JACQUINI imperfecta, desunt enim folia radicalia; sed caulis aperte *villosus*, folia caulina *ciliata* fere ut in figura addita a BIROLI: nec magis faciendae leves differentiae ab Auctore allatae; nempe: « folia ad basin caulis in » figura JACQUINI *nimis longa*, omnia *nimis sinuata* (2); » nam in primis BIROLIUS ipse non a *figura*, *sinubusque* foliorum, sed ab eorum *superficie*, et caulis *compositione* permotus fuit, dum novam speciem proposuit; maxime dolendum diligentissimum Auctorem non praevisse quoque figuram *Verbasci*, quod verum credit *phaeniceum*, ut comparatione facilius differentiae agnoscerentur! praeterea recte observavit LA MARKIUS in *Encyc. metod. tom. 4, p. 211*,

---

(1) Ibid. p. 1. vers. *cl.* JACQUIN, et p. 2. vers. *cl.* LAMARK.

(2) Ibid. p. 1. vers. *cl.* JACQUIN.



quoad *V. phaeniceum*, nempe folia caulina superna altera esse *integra*, altera plus minusve *dentata*, inferiora autem in nonnullis speciminibus *oblonga*, *obtusata*, *sinuata*, uti videre est in icone ab eo tradita *Illustr. t.* 117, quae foliis figurae JACQUINI perfecte aecommodatur.

Quid plura? Prae oculis habemus duo specimina sicca a cl. BELLARDI humaniter, uti sui moris est, communicata. Primum praebet folia radicalia duplo latiora, longe petiolata, subglabra, caulina subamplexicaulia, lanceolato-ovata, crenata villosiuscula; caulem simplicem villosum, ramis ex axillis infimis, et congruit omnimodo cum figuris LOBELII, et JACQUINI, ac icone Taurinensi. Alterum praesefert omnes characteres figurae a cl. BIROLIO additae, exceptis foliis caulinis inferioribus in specimine valde minoribus. Utraque collecta fuere inter incolas hujus ditionis, uti planta de qua ALLIONIUS maxima diligentia iconem curavit: immo a tergo papyri, cui adhaeret secundum specimen BELLARDI, extat haec vetus annotatiuncula: « *verbascum phaeniceum* LIX. » inveni in ericetis agri Ciliani, Clavarii, Rondizzoni, Ciriaci, alibique » quod consentaneum stationibus ab ALLONIO indicatis.

Comparatis insuper quamplurimis aliis speciminibus diversis temporibus collectis, praesertim tribus penes cl. GIUSTA R. II. Botanici Taurinensis Rectorem existentibus, in omnibus perspexi nonnullas notabiles differentias tam in mensura et margine foliorum, quam praecipue in superficie totius plantae quoad pubem.

In Herbario cl. LATOURETTE, quod servatur Lugduni penes optimum BALBISIIUM exstant duo specimina *F. phaenicei* ex plantis olim in horto botanico vigentibus, ac provenientiibus ex seminibus missis ab immortali ALLONIO: illa referunt folia nuda, margine ciliata, ciliis apice glandulosis; caulem autem ramosum, ramis ex axillis mediis: quod culturae fortassis tribuendum.

Inutile arbitror hic referre quod cl. WILLDENOWIUS in *sp. plant.* tom. 1, part. 2, p. 1004 attulit de *F. phaeniceo*; repetit enim characteres LINNEI, et admittit omnes synonymias supra allatas: moneo tamen in descriptione caulem *ramosum* non dicere, ceu supposuit cl. BIROLI (1), immo *simplicem* adnotat: aliunde hujusmodi descriptionis non WILLDENOWIUS sed LINNEUS auctor, ceu ille profitetur, ac apparet ex comparatione inter utramque descriptionem.

Tandem idem WILLDENOWIUS in *enum. plant. hort. Berolin.* tom. 1, p. 225, characteres específicos LINNEI emendavit hoc modo: « foliis *nudis* radicalibus inaequaliter *dentatis*, caulinis lanceolatis *dentatis* basi cuneatis, caule » *subnudo*, racemo elongato, pedunculis alternis ». Parum interest ipsum repetere *caule subnudo*, *folia nuda*, uti observavit cl. BIROLI (2), nam epithetona *nudus*, *subnudus* etc. respectu *caulis* non opponuntur epithetonibus *ramosus*, *subramosus* etc., sed aliis *foliosus*, *subfoliosus* etc.,

---

(1) Ibid. p. 2. vers. cl. WILLDENOWIUS.

(2) Ibid.

et respectu foliorum jam vidimus in nonnullis iconibus, speciminibusque esse fere *nuda*, in aliis plus minusve *villosa*. Et in plantis vigentibus pili adeo rari et breves sunt, ut nisi oculo armato conspici queant, et sic earum aspectus folia referat *nuda*, ac fere nitentia; unde consequitur non facile credendum cilia quae ad foliorum marginem reperiuntur a pilis esse efformata, ut autumat BIROLIUS (1). Caeterum descriptio WILLDENOWII congruit cum Icone Taurinensi, et primo specimine *Bellardiano*.

Ex allatis consequi videtur

1.<sup>o</sup> Omnes auctores supralaudatos semper descripsisse eandem plantam de qua agimus, videlicet *Verbascum phae-niceum* L.

2.<sup>o</sup> Illam, quasi polymorpham habita ratione foliorum *superficie*, caulisque *compositionis*, modo folia referre *nuda*, vel *subnuda*, modo plus minusve *villosa*, vel *pubescentia*, vel *pilosa*; caulem autem vel *simplicissimum*, aut ex alis infinis *ramusculos gerentem*, nunquam proprie *ramosum*.

3.<sup>o</sup> Huiusmodi notas nimis esse fallaces ad constituendas proprias, constantesque differentias specificas, et potius climati, solo, terrae, culturae, aliisve fortuitis causis tribuendas; ex quo verendum, ne dum amabilem scientiam

---

(1) Ibid. pag. 3. vers. *folia radicalia*.

adaugere totis viribus nitimur, confusionem in eam effundamus, quod heu! nimium frequens.

4.<sup>o</sup> Quod si Botanicorum judicio, quibus hasce observationes submittere ausus sum, planta a cl. BIROLIO descripta imposito nomine sancitur, eos scire debere (quod maximi momenti), tam *Verbascum phaeniceum* LIN. quam *V. cisalpinum* BIROLI, amoenas exornare Pedemontanas regiones, gratumque animum nos profiteri erga cl. meique amatissimum Auctorem, communem patriam nova specie ditasse.

## NOTE

## SUR L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION

$$(1) \dots \frac{d^2y}{dx^2} + gx^m y = 0.$$

PAR M. PLANA

*Lue à la Séance du 20 janvier 1822.*

Lorsque l'on suppose l'exposant  $m$  positif il est facile d'obtenir, par les séries, deux intégrales particulières de cette équation, renfermant chacune une constante arbitraire.

Voici ces intégrales telles qu'EULER les a trouvées, et qui se trouvent rapportées dans le second volume du calcul intégral de M. LACROIX ( pag. 413 ). Soit pour plus de simplicité;

$$A = \frac{1}{(m+2)^2 \left(1 - \frac{1}{m+2}\right)};$$

$$A_1 = \frac{1}{2(m+2)^4 \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \left(2 - \frac{1}{m+2}\right)};$$

$$A_2 = \frac{1}{2.3.(m+2)^6 \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \left(2 - \frac{1}{m+2}\right) \left(3 - \frac{1}{m+2}\right)};$$

$$A_3 = \frac{1}{2.3.4. (m+2)^8 \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \left(2 - \frac{1}{m+2}\right) \left(3 - \frac{1}{m+2}\right) \left(4 - \frac{1}{m+2}\right)};$$

etc.

$$B = \frac{1}{(m+2)^2 \left(1 + \frac{1}{m+2}\right)};$$

$$B_1 = \frac{1}{2. (m+2)^4 \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \left(2 + \frac{1}{m+2}\right)};$$

$$B_2 = \frac{1}{2.3. (m+2)^6 \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \left(2 + \frac{1}{m+2}\right) \left(3 + \frac{1}{m+2}\right)};$$

etc.

Maintenant, si l'on fait  $x' = x^{m+2}$ , on trouvera, que en désignant par  $y'$ ,  $y''$  les deux intégrales particulières on a ;  
 $y' = C. \{ 1 - Agx' + A_1 g^2 x'^2 - A_2 g^3 x'^3 + A_3 g^4 x'^4 - \text{etc.} \} ;$   
 $y'' = C'x. \{ 1 - Bgx' + B_1 g^2 x'^2 - B_2 g^3 x'^3 + B_3 g^4 x'^4 - \text{etc.} \} ;$   
 où  $C$ ,  $C'$  représentent deux constantes arbitraires.

Il est clair, que en prenant  $y = y' + y''$  l'on aura l'intégrale complète de la proposée. Ainsi, pour avoir la valeur de  $y$  sous forme finie, il suffit d'exprimer sous cette forme  $y'$  et  $y''$ . Pour cela, voici le procédé qui m'a paru le plus simple pour sommer ces séries par des intégrales définies simples.

En désignant par  $u$  un nombre entier et positif, et prenant  $u = 0$ ,  $u = 1$  pour limites de l'intégration, il est facile de trouver, que en intégrant par parties l'on a ;

$$\int u^n du (1-u^2)^{\frac{p}{q}} = \frac{q(n-1) \cdot \int u^{n-2} du (1-u^2)^{\frac{p}{q}}}{2p+q(n+1)}.$$



D'après ce résultat il est aisé d'en conclure, que  $n$  étant un nombre *pair* exprimé par  $2i$ , l'on a ;

$$\int u^{2i} du (1-u^2)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^i \cdot (1.3.5.7. \dots 2i-1) \cdot \int du (1-u^2)^{\frac{p}{q}}}{(2p+3q)(2p+5q)(2p+7q) \dots (2p+(2i+1)q)};$$

ou bien ;

$$(2) \dots \int u^{2i} du (1-u^2)^{\frac{p}{q}} = \frac{(1.3.5.7. \dots 2i-1) \int du (1-u^2)^{\frac{p}{q}}}{\left(3 + \frac{2p}{q}\right) \left(5 + \frac{2p}{q}\right) \left(7 + \frac{2p}{q}\right) \dots \left(2i+1 + \frac{2p}{q}\right)}.$$

Maintenant, si nous faisons  $p = -(m+4)$  ;  $q = 2(m+2)$ , nous aurons ;

$$3 + \frac{2p}{q} = 2 \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) ; \quad 5 + \frac{2p}{q} = 2 \left(2 - \frac{1}{m+2}\right) ; \text{ etc.}$$

et par conséquent ;

$$(3) \dots \int u^{2i} du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} = \frac{(1.3.5.7. \dots 2i-1) \int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}}}{2^i \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) \left(2 - \frac{1}{m+2}\right) \dots \left(i - \frac{1}{m+2}\right)}.$$

Actuellement, si l'on prend  $p = -m$ ,  $q = 2(m+2)$  l'on a ;

$$3 + \frac{2p}{q} = 2 \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) ; \quad 5 + \frac{2p}{q} = 2 \left(2 + \frac{1}{m+2}\right) ; \text{ etc.}$$

et par conséquent ;

$$(4) \dots \int du u^{2i} (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} = \frac{(1.3.5.7. \dots 2i-1) \int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}}}{2^i \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \left(2 + \frac{1}{m+2}\right) \dots \left(i + \frac{1}{m+2}\right)}.$$

Cela posé, faisons pour plus de simplicité ;

$$\frac{1}{M} = \int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} ;$$

$$\frac{1}{M'} = \int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} ;$$

$$U_{(i)} = \int u^{2i} du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} ;$$

$$V_{(i)} = \int u^{2i} du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} .$$

Maintenant remarquons, que en faisant ;

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{(m+2)^2} \cdot U_{(1)} ; & R &= \frac{2}{(m+2)^2} \cdot V_{(1)} ; \\ P_1 &= \frac{2^3}{3.4.(m+2)^4} \cdot U_{(2)} ; & R_1 &= \frac{2^3}{3.4.(m+2)^4} \cdot V_{(2)} ; \\ P_2 &= \frac{2^5}{3.4.5.6.(m+2)^6} \cdot U_{(3)} ; & R_2 &= \frac{2^5}{3.4.5.6.(m+2)^6} \cdot V_{(3)} ; \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

l'on a les équations suivantes ;

$$\begin{aligned} A &= MP ; & A_1 &= MP_1 ; & A_2 &= MP_2 ; & A_3 &= MP_3 ; \text{ etc. ;} \\ B &= MR ; & B_1 &= MR_1 ; & B_2 &= MR_2 ; & B_3 &= MR_3 ; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Donc, nous avons ;

$$y' = CM \{ U_{(0)} - Pgx' + P_1g^2x'^2 - P_2g^3x'^3 + P_3g^4x'^4 - \text{etc.} \} ;$$

$$y'' = CM'x. \{ V_{(0)} - Rgx' + R_1g^2x'^2 - R_2g^3x'^3 + R_3g^4x'^4 - \text{etc.} \} ;$$

substituant pour  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , etc. leurs valeurs, on trouvera, que en faisant pour plus de simplicité  $m+2=n$  l'on a ;

$$y = CM \{ U_{(0)} - \frac{2^2.gx'.U_{(1)}}{2.n^2} + \frac{2^4.g^2x'^2.U_{(2)}}{2.3.4.n^4} - \frac{2^6.g^3x'^3.U_{(3)}}{2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc.} \} .$$

On obtiendra de même ;

$$J'' = C'M'x. \{ V_{(0)} - \frac{2^2 g x' F_{(1)}}{2.n^2} + \frac{2^4 g^2 x'^2 F_{(2)}}{2.3.4.n^4} - \frac{2^6 g^3 x'^3 F_{(3)}}{2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc} \}.$$

En substituant pour  $U_{(0)}$ ,  $U_{(1)}$ ,  $U_{(2)}$ , etc.  $V_{(0)}$ ,  $V_{(1)}$ ,  $V_{(2)}$  etc. leurs valeurs affectées du signe intégral, et posant pour plus de simplicité ;

$$q = (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} ; \quad q' = (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} ;$$

il viendra ;

$$J' = C M. \int q du. \{ 1 - \frac{g x' (2u)^2}{2.n^2} + \frac{g^2 x'^2 (2u)^4}{2.3.4.n^4} - \frac{g^3 x'^3 (2u)^6}{2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc} \} ;$$

$$J'' = C' M' x. \int q' du \{ 1 - \frac{g x' (2u)^2}{2.n^2} + \frac{g^2 x'^2 (2u)^4}{2.3.4.n^4} - \frac{g^3 x'^3 (2u)^6}{2.3.4.5.6.n^6} + \text{etc} \}.$$

Or il est évident que la série infinie qui se rencontre ici est le développement d'un *cosinus*, et que par conséquent nous avons, sous forme finie ;

$$J' = C M. \int q du. \cos. \left( \frac{2u\sqrt{g x'}}{n} \right) ;$$

$$J'' = C' M' x. \int q' du. \cos. \left( \frac{2u\sqrt{g x'}}{n} \right).$$

Ces formules me semblent remarquables par leur simplicité.

Maintenant, pour distinguer le cas où le nombre  $g$  est positif de celui où il est négatif, nous ferons dans le premier,  $g = a^2$ , et dans le second  $g = -a^2$ . Alors les formules que nous venons de trouver donnent pour satisfaire à l'équation ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 x^m y = 0.$$

$$y' = CM. \int q du. \cos. \left( \frac{2au.x\sqrt{x^m}}{m+2} \right);$$

$$y'' = C'M'x. \int q' du \cos. \left( \frac{2au.x\sqrt{x^m}}{m+2} \right);$$

comme  $C, C'$  sont deux constantes arbitraires, rien n'empêche d'écrire simplement  $C$  au lieu de  $CM$ , et  $C'$  au lieu de  $C'M'$ : alors, en substituant pour  $q, q'$  leurs valeurs l'on obtient pour l'intégrale complète de l'équation,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx^2} + a^2 x^m y &= 0; \\ y &= C \int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} \cos. \left( \frac{2ax.u.\sqrt{x^m}}{m+2} \right) \\ &+ C'x \int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} \cos. \left( \frac{2ax.u.\sqrt{x^m}}{m+2} \right); \end{aligned}$$

les limites de l'intégration relative à  $u$  étant  $u=0, u=1$ .

On peut aussi écrire cette intégrale sous cette forme ;

$$(a)...y = \int du. \cos. \left( \frac{2au.x\sqrt{x^m}}{m+2} \right). \left\{ C(1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} + C'x(1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} \right\}.$$

Pour avoir l'intégrale analogue de l'équation

$$\frac{dy}{dx^2} - a^2 x^m. y = 0,$$

il faut observer que en prenant  $g = -a^2$  l'on a ;

$$\cos. \left( \frac{2u\sqrt{gx'}}{n} \right) = \frac{e^{\frac{-2au\sqrt{x'}}{n}} + e^{\frac{2au\sqrt{x'}}{n}}}{2};$$

ce qui donne ;

$$\begin{aligned} y' &= C. \int q du. \left( e^{\frac{-2au\sqrt{x^m}}{m+2}} + e^{\frac{2au\sqrt{x^m}}{m+2}} \right); \\ y'' &= C'x. \int q' du \left( e^{\frac{-2au.x\sqrt{x^m}}{m+2}} + e^{\frac{2au.x\sqrt{x^m}}{m+2}} \right). \end{aligned}$$

Donc, en prenant la somme de ces deux fonctions on aura pour l'intégrale complète;

$$(\alpha') \dots y = \int du. \left( e^{\frac{-2aux\sqrt{x^m}}{m+2}} + e^{\frac{2aux\sqrt{x^m}}{m+2}} \right) \left( C(1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} + C'x(1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} \right).$$

En faisant  $m=0$ , la formule  $(\alpha)$  donne,

$$y = \int du. \cos(aux) \{ Cx + C(1-u^2)^{-1} \},$$

pour l'intégrale complète de l'équation  $\frac{dy}{dx^2} + a^2y = 0$ .

Or, cette expression de  $y$  donne;

$$y = \frac{C'}{a} \sin. aux + C \int \frac{du}{1-u^2} \cdot \cos. (aux) + \text{constante};$$

et comme les limites de l'intégration sont  $u=0$ ,  $u=1$ , nous aurons;

$$y = \frac{C'}{a} \sin. ax + C \int \frac{du}{1-u^2} \cdot \cos. aux.$$

L'on sait d'ailleurs, que dans ce cas la véritable intégrale est,

$$y = A \sin. ax + A' \cos. ax,$$

en désignant par  $A$ ,  $A'$  les deux constantes arbitraires.

Ainsi, il faut démontrer que le terme

$$Q = C \int \frac{du}{1-u^2} \cdot \cos. aux,$$

remplace le terme  $A' \cos. ax$ . À cet effet remarquons que en développant le *cosinus* l'on a;

$$Q = C \int \frac{du}{1-u^2} \left\{ 1 - \frac{a^2 x^2 u^2}{2} + \frac{a^4 x^4 u^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6 x^6 u^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \right\}.$$

Or nous avons en général ;

$$\frac{u^{2i}}{1-u^2} = - \frac{(u^2-1)^i}{u^2-1}$$

$$= - \left\{ (u^2-1)^{i-1} + i(u^2-1)^{i-2} + \frac{i(i-1)}{2}(u^2-1)^{i-3} \dots + 1 \right\} ;$$

donc l'on a ;

$$\int \frac{u^{2i} du}{1-u^2} = \int \frac{du}{1-u^2} + H_{(i)}$$

en désignant par  $H_{(i)}$  la quantité finie, qui, pour chaque valeur de  $i$ , doit être ajoutée à  $\int \frac{du}{1-u^2}$  : il suit de là que nous avons ;

$$Q = C \cos. ax. \int \frac{du}{1-u^2} + C(Nx^2 + N'x^4 + N''x^6 + \text{etc.})$$

$N, N', N''$  etc. étant des coefficients finis, que l'on peut déterminer par la formule précédente.

Maintenant, représentons par  $A'$  une constante arbitraire finie ; rien n'empêche de faire ;

$$C = \frac{A'}{\int \frac{du}{1-u^2}} ;$$

et alors l'on a ;

$$Q = A' \cos ax + \frac{A'(Nx^2 + N'x^4 + N''x^6 + \text{etc.})}{\int \frac{du}{1-u^2}} ;$$

Mais la formule

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \log. \frac{1+u}{1-u} + \text{constante} ;$$

fait voir que la valeur de l'intégrale  $\int \frac{du}{1-u^2}$ , prise depuis  $u=0$  jusqu'à  $u=1$  est infinie : donc il est permis de supprimer le terme divisé par cette intégrale, ce qui réduit l'expression précédente de  $Q$  à  $Q = A' \cos. ax$ , comme cela doit être.



En revenant actuellement sur notre analyse générale, on comprendra, que nous sommes tombés sur cette difficulté dans le cas particulier de  $m=0$ , parce que nous avons changé la forme des constantes arbitraires  $CM, CM'$ , qui sont naturellement introduites dans le calcul. Il nous paraît convenable, d'après cela, de rétablir ces constantes, et d'énoncer le résultat de cette recherche de la manière suivante.

1.° L'intégrale complète de l'équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2x^m \cdot y = 0,$$

est ;

$$y = \frac{C \int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} \cdot \cos\left(\frac{2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}\right)}{\int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}}} + \frac{C'x \cdot \int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} \cdot \cos\left(\frac{2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}\right)}{\int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}}}.$$

2.° L'intégrale complète de l'équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2x^m \cdot y = 0$$

est ;

$$y = \frac{\frac{1}{2} \cdot C \int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}} \cdot \left( e^{\frac{-2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}} + e^{\frac{2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}} \right)}{\int du (1-u^2)^{\frac{-(m+4)}{2m+4}}} + \frac{\frac{1}{2} C'x \cdot \int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}} \cdot \left( e^{\frac{-2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}} + e^{\frac{2au \cdot x \cdot \sqrt{x^m}}{m+2}} \right)}{\int du (1-u^2)^{\frac{-m}{2m+4}}};$$

les limites de l'intégration par rapport à  $u$  étant  $u=0$  et  $u=1$ .

Il est visible, que ces intégrales cessent d'avoir une signification claire dans le cas particulier de  $m=-2$ ; mais on sait que l'équation,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \pm \frac{a^2 y}{x^2} = 0,$$

a pour intégrale complète;

$$y = \sqrt{x} \cdot \left\{ C x \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} + C' x - \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \right\};$$

$C, C'$  désignant deux constantes arbitraires.

Il est essentiel de remarquer, que ces expressions de  $y$ , par les intégrales définies, sont beaucoup plus générales que les expressions par les séries desquelles nous sommes partis. Car, les valeurs des coefficients  $A_{(i)}$ ,  $B_{(i)}$  font voir, que les séries infinies sont en défaut lorsque l'on a  $(m+2)i=1$ , ou bien  $(m+2)i=-1$ , à cause de l'infini qui se présente dans l'expression des coefficients: or, il est visible, que cet inconvénient n'a pas lieu en employant nos expressions sous forme finie.

Il n'est pas moins digne de remarque, que ces mêmes expressions mettent en évidence les cas où la proposée peut être intégrée, sans employer le signe intégral. En effet, ces cas sont ceux où l'un, ou l'autre des deux exposans  $\frac{-(m+4)}{2m+4}$ ,  $\frac{-m}{2m+4}$  sera un nombre entier et positif, ce qui arrivera toutes les fois que l'exposant  $m$  sera compris dans la forme  $\frac{-4i}{2i \pm 1}$ ,  $i$  étant un nombre entier et positif.

Il me semble, que cette propriété imprime à nos formules le caractère de la plus grande simplicité jointe à la plus grande généralité.

Dans le cas où  $m = \frac{-i}{2i \pm 1}$ , il n'y a qu'une seule des deux parties qui composent nos formules qui se présente sous forme finie : soit  $y'$  cette partie, laquelle renfermera toujours une constante arbitraire : il est facile de voir, que  $B$  désignant une autre constante arbitraire, l'on satisfera à la proposée en prenant,

$$y = By' + y' \cdot \int \frac{dx}{y'^2},$$

ce qui détermine l'intégrale complète sous forme finie, puisque cette dernière expression renferme deux constantes arbitraires.

Je dois ajouter maintenant, que EULER avait donné, sous différentes formes, et par des intégrales définies, l'intégrale de l'équation  $\frac{dy}{dx^2} \pm a^2 x^m \cdot y = 0$ , ainsi qu'on peut l'apprendre en consultant le 3.<sup>e</sup> volume du calcul intégral de M. LACROIX ( pag. 536, 537 ). Mais ces intégrales d'EULER renferment une seule constante arbitraire, et il ne paraît pas, que ce grand géomètre ait remarqué le moyen simple que nous venons d'exposer, pour parvenir à l'intégrale complète, par des intégrales simples.

M. POISSON a démontré ( voyez Journal de l'école polytechnique 16.<sup>e</sup> cahier pag. 237 ), que l'on pouvait satisfaire à l'équation,  $\frac{dy}{da^2} = bn^2 \cdot a^{n-2} \cdot y$ , en prenant

TOM. XXVI.

X x x

$$y = C. \int dx. e^{-x^n} \frac{-ba^n}{x^n},$$

et intégrant depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=\infty$ ,  $C$  étant d'ailleurs une constante arbitraire. Ainsi cette intégrale n'est pas complète : il est vrai, que en l'ajoutant avec celle d'EULER on en aurait une avec deux constantes arbitraires (\*). Mais de tels résultats me paraissent plutôt un jeu de l'analyse, que des expressions convenables pour en faire sortir les lois des phénomènes, dans les applications qui exigeraient la connaissance de l'intégrale complète de cette équation.

Pour donner une idée des difficultés que l'on rencontre dans l'intégration des équations d'une forme tant soit peu différente de celle que nous venons de considérer, je vais exposer ici quelques recherches sur l'intégration de l'équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(g + \frac{f}{x^2}\right).y = 0,$$

qui nous offriront l'occasion de démontrer un résultat très-remarquable découvert par M. LEGENDRE, et énoncé sans démonstration dans un de ses mémoires (Voyez Académie des Sciences de Paris année 1789 pag. 409).

Pour avoir l'intégrale complète de cette équation par les séries, il suffit d'y appliquer la méthode exposée à la

(\*) Nous indiquons ce moyen pour exclure les intégrales définies doubles. Autrement il est très-facile d'avoir l'intégrale complète à l'aide d'une intégrale particulière : il suffit pour cela de recourir à la formule

$$y = By' + y' \int \frac{dx}{y'^2},$$

que nous avons rapportée ci-dessus.

page 421 du second volume du calcul intégral de M. LACROIX. Par ce moyen l'on trouvera sans difficulté, que en faisant pour plus de simplicité

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1-4f}}{2};$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1-4f}}{2};$$

$$[f + (\alpha+1)(\alpha+2)]A_1 + g = 0;$$

$$[f + (\alpha+3)(\alpha+4)]A_2 + gA_1 = 0;$$

$$[f + (\alpha+5)(\alpha+6)]A_3 + gA_2 = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[f + (\alpha+2i-1)(\alpha+2i)]A_i + gA_{i-1} = 0$$

etc. ;

$$[f + (\beta+1)(\beta+2)]B_1 + g = 0;$$

$$[f + (\beta+3)(\beta+4)]B_2 + gB_1 = 0;$$

$$[f + (\beta+5)(\beta+6)]B_3 + gB_2 = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[f + (\beta+2i-1)(\beta+2i)]B_i + gB_{i-1} = 0$$

etc. ;

l'on a ,

$$\begin{aligned} (\alpha) \dots y = Ax^{\alpha} \{ 1 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \text{etc.} \} \\ + Bx^{\beta} \{ 1 + B_1x^2 + B_2x^4 + B_3x^6 + \text{etc.} \} , \end{aligned}$$

$A, B$  étant deux constantes arbitraires.

Les valeurs des exposans  $\alpha, \beta$  seront, comme l'on voit, toujours réelles lorsque le coëfficient désigné par  $f$  sera négatif. Pour examiner directement ce cas, et donner en même tems une forme rationnelle aux expressions de  $\alpha$  et de  $\beta$  nous ferons  $f = -k(k+1)$ , ce qui donne ,

$1 - 4f = 1 + 4k + 4k^2 = (1 + 2k)^2$ , et par conséquent  $\alpha = 1 + k$ ,  $\beta = -k$ . Maintenant, si l'on fait  $g = m^2$ , la valeur de  $y$  qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y - \frac{k.k+1}{x^3} \cdot y = 0 ,$$

sera ,

$$y = Ax^{1+k} \cdot \{ 1 - A'_1m^2x^2 + A'_2m^4x^4 - A'_3m^6x^6 + \text{etc.} \}$$

$$Bx^{-k} \cdot \{ 1 - B'_1m^2x^2 + B'_2m^4x^4 - B'_3m^6x^6 + \text{etc.} \} ,$$

les coëfficiens  $A', B'$  étant déterminés par les équations suivantes

$2(2k+3).A'_1 - 1 = 0 ;$	$2(1-2k)B'_1 - 1 = 0 ;$
$4(2k+5).A'_2 - A'_1 = 0 ;$	$4(3-2k)B'_2 - B'_1 = 0 ;$
$6(2k+7).A'_3 - A'_2 = 0 ;$	$6(5-2k)B'_3 - B'_2 = 0 ;$
$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$
$2i(2k+2i+1)A'_i - A'_{i-1} = 0$	$2i(2i-1-2k)B'_i - B'_{i-1} = 0$
etc.	etc.

Il est évident que l'expression précédente de  $y$  peut être considérée comme une fonction du produit  $mx$ ; car rien n'empêche de changer respectivement les constantes arbitraires  $A$  et  $B$  en  $\frac{A}{m^{1+k}}$ ,  $Bm^k$ . L'équation différentielle même met en évidence cette propriété *a priori*, en l'écrivant ainsi,

$$\frac{d^2y}{m^2 dx^2} + y - \frac{k.k+1}{m^2 x^2} y = 0 ,$$

et remplaçant le produit  $mx$  par une seule lettre.

Donc il suffit de considérer l'équation,

$$(\beta) \dots \dots \frac{d^2y}{dx^2} + y - \frac{k.k+1}{x^2} y = 0 ,$$

à laquelle l'on peut toujours ramener la précédente.

D'après la théorie précédente nous aurons pour l'expression complète de  $y$  qui satisfait à l'équation (2);

$$(\gamma) \dots \dots y = Ax^{1+k}.X + Bx^{-k}.X' ;$$

en faisant pour plus de simplicité,

$$X = 1 - \frac{x^2}{2.(2k+3)} + \frac{x^4}{2.4(2k+3)(2k+5)} - \frac{x^6}{2.4.6(2k+3)(2k+5)(2k+7)} + \text{etc.}$$

$$X' = 1 + \frac{x^2}{2.(2k-1)} + \frac{x^4}{2.4(2k-1)(2k-3)} + \frac{x^6}{2.4.6(2k-1)(2k-3)(2k-5)} + \text{etc.}$$

Cette expression de  $y$  jouit d'une propriété remarquable.



Faisons

$$z = x^{1+k} \cdot X,$$

et désignons par  $z'$  ce que devient  $z$  en  $x$  changeant  $k$  en  $k+1$  : alors en différentiant  $z'$  l'on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{dx} = & (k+2)x^{k+1} - \frac{(k+4)x^{k+3}}{2(2k+5)} + \frac{(k+6)x^{k+5}}{2 \cdot 4(2k+5)(2k+7)} \\ & - \frac{(k+8)x^{k+7}}{2 \cdot 4 \cdot 6(2k+5)(2k+7)(2k+9)} + \text{etc.} \end{aligned}$$

En ajoutant au premier membre de cette équation ,  $\frac{(k+1)z'}{x}$ , et au second la même quantité en série, on reconnoîtra aussitôt, que le résultat peut être mis sous cette forme ;

$$(I) \dots \frac{dz'}{dx} + \frac{(k+1)z'}{x} = (2k+3)z.$$

On trouvera de la même manière, que en posant

$$u = x^{-k} \cdot X,$$

et nommant  $u'$  ce que devient  $u$  par le changement de  $k$  en  $k+1$ , l'on a ,

$$(II) \dots \frac{du'}{dx} + \frac{(k+1)u'}{x} = \frac{u}{2k+1}.$$

Donc, en supposant les fonctions  $z$ ,  $u$  connues sous forme finie l'on obtiendra sous forme finie les valeurs de  $z'$ ,  $u'$  en intégrant les équations linéaires (I), (II), lesquelles donnent immédiatement ;

$$\begin{aligned} z' &= x^{1-(k+1)} \cdot \left\{ (2k+3) \cdot \int x^{k+1} z \cdot dx + C \right\}; \\ u' &= x^{-k-(k+1)} \cdot \left\{ \frac{1}{2k+1} \cdot \int x^{k+1} u \cdot dx + C' \right\}; \end{aligned}$$

$C$ ,  $C'$  étant les deux constantes arbitraires introduites par cette intégration.

Pour donner à ce résultat une forme plus explicite nous ferons ;

$$z = \psi(x, k) \quad ; \quad u = \varphi(x, k):$$

alors nous aurons ;

$$z' = \psi(x, k+1) ; \quad u' = \varphi(x, k+1).$$

Cela posé, il est clair que en changeant  $k$  en  $k-1$ , les expressions précédentes de  $z'$ ,  $u'$  donnent ;

$$(\delta) \dots z = x^{-k} \cdot \left\{ (2k+1) \cdot \int x^k \cdot \psi(x, k-1) dx + C \right\} ;$$

$$(\delta') \dots u = x^{-k} \cdot \left\{ \frac{1}{2k-1} \cdot \int x^k \cdot \varphi(x, k-1) dx + C' \right\} ;$$

où les constantes  $C$ ,  $C'$  doivent être déterminées de manière que les fonctions  $\frac{z}{x^{1+k}}$ ,  $\frac{u}{x^{-k}}$ , deviennent égales chacune à l'unité lorsqu'on y fait  $x=0$ , puisque les séries infinies  $X$ ,  $X'$  jouissent de cette propriété.

Après avoir satisfait à cette condition l'on aura

$$y = Az + Bu$$

pour intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y - \frac{k, k+1}{x^2} \cdot y = 0.$$

De-là on tire la conséquence importante, que l'intégrale complète de cette équation peut être trouvée sous forme finie, et indépendamment du signe intégral, toutes les fois que la quantité  $k$  sera un nombre entier et positif. En effet; en faisant d'abord  $k=0$ , les séries désignées par  $X$ ,  $X'$  sont sommables, et l'on a ;

$$y = A \sin. x + B. \cos. x,$$

ce qui donne ;

$$\psi(x,0) = \sin x ; \varphi(x,0) = \cos x.$$

Maintenant, il est facile d'avoir les valeurs de  $\psi(x,1)$   $\varphi(x,1)$ , à l'aide des équations  $(\delta)$ ,  $(\delta')$  qui donnent,

$$\psi(x,1) = \frac{1}{x} \cdot \left\{ 3 \cdot \int x \sin x \cdot dx + C \right\} ;$$

$$\varphi(x,1) = \frac{1}{x} \cdot \left\{ \int x \cdot \cos x \cdot dx + C' \right\} ;$$

ou bien ;

$$\psi(x,1) = \frac{1}{x} \cdot \left\{ C + 3 \sin x - 3x \cdot \cos x \right\} ;$$

$$\varphi(x,1) = \frac{1}{x} \cdot \left\{ C' + x \sin x + \cos x \right\}.$$

Pour déterminer facilement la constante  $C$  il suffit de remarquer, que ayant, en série,  $\psi(x,1) = x(1 - \frac{x^2}{2.5} + \text{etc.})$ , l'on doit avoir  $\psi(x,1) = 0$ , lorsque  $x = 0$  ; et par conséquent  $C = 0$ . L'on démontrera de même que  $C' = 0$  : ainsi nous avons ;

$$\psi(x,1) = \frac{3}{x} \cdot (\sin x - x \cos x) ;$$

$$\varphi(x,1) = \frac{1}{x} \cdot (\cos x + x \sin x).$$

En substituant ces valeurs dans les formules  $(\delta)$ ,  $(\delta')$  l'on a ;

$$\psi(x,2) = \frac{1}{x^2} \left\{ C + 3.5 \cdot \int x(\sin x - x \cos x) dx \right\} ;$$

$$\varphi(x,2) = \frac{1}{x^2} \left\{ C' + \frac{2}{3} \cdot \int x(\cos x + x \sin x) dx \right\}.$$

Effectuant l'intégration l'on verra que l'on doit avoir  $C = 0$ ,  $C' = 0$  ; et

$$\psi(x,2) = \frac{3.5}{x^2} \left\{ \sin x(3-x^2) - 3x \cos x \right\};$$

$$\varphi(x,2) = \frac{1}{3.x^2} \left\{ \cos x(3-x^2) + 3x \sin x \right\}.$$

On trouvera de la même manière;

$$\psi(x,3) = \frac{3.5.7}{x^3} \left\{ \sin x(15-6x^2) - (15x-x^3) \cos x \right\};$$

$$\varphi(x,3) = \frac{1}{3.5.x^3} \left\{ \cos x(15-6x^2) + (15x-x^3) \sin x \right\};$$

$$\psi(x,4) = \frac{3.5.7.9}{x^4} \left\{ \sin x(105-45x^2+x^4) - (105x-10x^3) \cos x \right\};$$

$$\varphi(x,4) = \frac{1}{3.5.7.x^4} \left\{ \cos x(105-45x^2+x^4) + (105x-10x^3) \sin x \right\}.$$

En général l'on a ;

$$\psi(x,k) = \frac{3.5.7 \dots 2k+1}{x^k} \left\{ P \sin x - Q \cos x \right\};$$

$$\varphi(x,k) = \frac{1}{3.5.7 \dots 2k-1.x^k} \left\{ P \cos x + Q \sin x \right\};$$

$P$  et  $Q$  désignant des fonctions rationnelles de  $x$ .

En faisant la somme de ces deux fonctions, multipliées chacune par une constante arbitraire, on pourra toujours donner à cette somme la forme,

$$y = (a \sin x + b \cos x) \left( 1 + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^4} + \dots \right) \\ + (a \cos x - b \sin x) \left( \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^3} + \frac{B_3}{x^5} + \dots \right);$$

où  $a$ ,  $b$  désignent les deux constantes arbitraires, et  $A_1$ ,  $A_2$  etc.;  $B_1$ ,  $B_2$  etc. des coefficients numériques dont la valeur varie avec le nombre  $k$ .

Il est facile de trouver la loi de ces coefficients: en effet; en posant pour plus de simplicité  $u = \frac{1}{x}$ , et différentiant

l'on obtient ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(a \cos x - b \sin x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} B_1 u + (2.2A_1 + B_2 - 2B_1)u^3 \\ \quad + (2.4A_2 + B_3 - 4.3B_2)u^5 \\ \quad + (2.6A_3 + B_4 - 6.5B_3)u^7 + \dots \end{array} \right\} \\ - (a \sin x + b \cos x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + (A_1 - 2B_1)u^2 + (A_2 - 3.2A_1 - 2.3B_2)u^4 \\ \quad + (A_3 - 5.4A_2 - 2.5B_3)u^6 + \dots \end{array} \right\}$$

substituant cette valeur, et celle de  $y$  dans l'équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{k.k+1}{x^3} \cdot y,$$

et égalant ensuite séparément à zéro, le polynome en  $u$  qui multiplie  $(a \sin x + b \cos x)$ , et celui qui multiplie  $(a \cos x - b \sin x)$  l'on obtiendra les équations suivantes ;

$k.k+1 = 2B_1;$	$k.k+1.B_1 = -2.2A_1 + 2B_1;$
$k.k+1.A_1 = 3.2A_1 + 2.3B_2;$	$k.k+1.B_2 = -2.4A_2 + 4.3B_2;$
$k.k+1.A_2 = 5.4A_2 + 2.5B_3;$	$k.k+1.B_3 = -2.6A_3 + 6.5B_3;$
$k.k+1.A_3 = 7.6A_3 + 2.7B_4$	$k.k+1.B_4 = -2.8A_4 + 8.7B_4;$
etc.	etc.

En résolvant ces équations l'on verra aussitôt que les résultats peuvent être mis sous cette forme ;

$$B_1 = + \frac{k.k+1}{2} ;$$

$$B_2 = - \frac{k-2.k-1.k.k+1.k+2.k+3}{2.4.6} ;$$

$$B_3 = + \frac{k-4.k-3.k-2.k-1.k.k+1.k+2.k+3.k+4.k+5}{2.4.6.8.10} ;$$

etc.

$$A_1 = - \frac{k-1.k.k+1.k+2}{2.4} ;$$

$$A_2 = + \frac{k-3.k-2.k-1.k.k+1.k+2.k+3.k+4}{2.4.6.8} ;$$

$$A_3 = - \frac{k-5.k-4.k-3.k-2.k-1.k.k+1.k+2.k+3.k+4.k+5.k+6}{2.4.6.8.10.12} ;$$

etc.

Ces coëfficiens s'accordent avec ceux qui ont été donnés par M. LEGENDRE dans le mémoire cité plus haut : on voit que leur nombre ne sera jamais infini lorsque  $k$  sera un nombre entier positif ou négatif. Dans les autres cas on aura par ce moyen une autre manière de satisfaire à la proposée par deux séries infinies, ordonnées suivant les puissances négatives de  $x$ .

S'il n'avait été question que de vérifier le résultat de M. LEGENDRE, l'on aurait pu le faire aussitôt par le procédé que nous venons d'exposer. Mais la véritable difficulté consiste ici dans la découverte de la forme du résultat ; et notre analyse a l'avantage de faire trouver directement cette forme, à l'aide de quelques considérations fort-simples.

L'équation ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{k.k+1}{x^2} . y ,$$

déjà très-importante par sa liaison avec une loi très-remarquable sur la densité des couches du sphéroïde terrestre imaginée par M. LEGENDRE , a acquis un plus grand intérêt par une fort-belle application que M. DE-LAPLACE en a faite dernièrement à la théorie de la chaleur de la terre. ( Voyez Connaissance des tems pour l'année 1823 pag. 250 ).



## DESCRIPTION

D'UN ANIMAL NOUVEAU

QUI APPARTIENT À LA CLASSE DES ÉCHINODERMES

PAR L. ROLANDO

PROFESSEUR D'ANATOMIE

*Lue à la Séance du 24 janvier 1822.*

---

Plusieurs années se sont écoulées depuis que j'ai promis de donner la description de quelques animaux tout-à-fait singuliers, que j'avais découverts dans les mers de Sardaigne; île très-riche en toute sorte de productions naturelles. Le doute qu'il pût exister une description de ces animaux qui ne fût pas à ma connaissance a été la seule cause d'un si long retard. Maintenant encouragé par le savant Collègue et Ami le professeur Bonelli, qui tout nouvellement a reçu de Gênes quelques uns de ces animaux, que je me proposais de faire connoître, je vais donner la figure, et la description d'un des plus curieux avec les détails anatomiques, dont je crois pouvoir garantir l'exactitude, ayant pu soumettre à la dissection plusieurs individus

en très-bon état, et presque vivans, ce qui ne pourrait se faire sur ceux conservés même pour peu de jours dans l'esprit de vin.

Je me trouvais au mois de mai 1816 sur les côtes de la petite île dite de l'Asinara, occupé de la recherche des Mollusques et des Annelides, qui se trouvent dans les eaux de la mer à peu de profondeur, lorsque dans un endroit où l'eau était bien claire, et dont le fond était d'une pierre très-lisse je vis une espèce de cordon assez long de couleur verte, qui avoit quelques ressemblances avec certaines espèces d'algues, ou de fucus, ou autre plante de cette nature, et qui se retirait brusquement et disparaissait presque entièrement. Je n'ai pas tardé à en trouver d'autres qui touchés légèrement se retiraient de même; de manière, que je ne savais pas, si c'était une plante très-sensible, ou un animal d'une nature bien singulière. Mes doutes n'ont pas été mieux éclaircis, lorsque je me suis emparé d'un de ces cordons, qui, comme je le dirai plus bas, était la queue de l'animal. Par là je me suis assuré que c'était une substance animale, sans toute fois pouvoir décider à quelle espèce elle pouvait appartenir. Après avoir redoublé mes recherches je réussit enfin, en soulevant une très-grosse pierre à saisir un de ces animaux tout-à-fait entier, et j'ai pu m'assurer, que ce cordon si contractile n'en était que la queue.

Cet animal ressemble exactement à un boudin, c'est-à-dire, son corps long de trois à quatre pouces est cylindrique,

oblong, et présente une bouche ronde, petite et très-simple à son extrémité antérieure, tandis que de la postérieure se prolonge une queue de 8 à 10 pouces divisée en deux cordons plus minces, plus membraneux, et comme festonnés à leur bord intérieur.

Tout le corps de cet animal est très-contractile principalement la queue qui peut se retirer, ou se raccourcir de manière à être réduite à un ou deux pouces de longueur. À cause de la très-grande contractibilité du sac, qui forme le corps de l'animal, et qui renferme les viscères, celui-ci tantôt se rétrécit en différens endroits et présente deux, trois, ou quatre bosses. Tantôt il s'allonge de manière à prendre la figure d'un gros ver de terre, ou d'une sangsue. La queue en se prolongeant de l'extrémité postérieure forme un pli long d'un demi pouce; c'est au commencement de celui-ci, que l'anus est, pour ainsi dire caché, ayant à son côté une autre ouverture qui conduit à un organe particulier, que je crois être destiné à la génération.

Tout le corps de l'animal est d'un beau vert, et ce n'est qu'avec difficulté, qu'on y distingue des lignes transversales, qui pourraient le faire croire une annellide; c'est enfin, en observant avec bien d'attention, qu'on découvre des petits points un peu relevés, qui pourraient être des glandes mucipares, puisqu'une assez grande quantité de mucus verdâtre s'exhale continuellement de tout le corps de l'animal. La quantité de cette humeur verdâtre qui suinte de sa peau est si grande, que ayant mis quelques

uns de ces animaux pêle-mêle avec des mollusques et des annellides dans une pinte d'esprit de vin , ceux-là ont suffi pour donner une couleur vert-foncée non seulement à la liqueur spiritueuse , mais à tous les autres animaux y contenus , qui en conséquence ont été défigurés. Ayant observé sept à huit de ces animaux en pleine vie , j'ai remarqué qu'ils nagent à-peu-près comme les sangsues , mais ils changent bien plus souvent de forme. C'est pour quoi ils se cachent dans des petits trous creusés dans les pierres , et , quoiqu'ils étendent en dehors leur longue queue , il est impossible de les en tirer , parce que ils enflent leur corps , et la queue se détache sans que l'animal paraisse en souffrir. Ce qui a fait , que la première fois que j'ai vu de ces animaux , ne pouvant saisir que cette partie , j'ai été bien embarrassé à reconnaître ce qu'elle pouvait être.

J'ai remarqué que quand cet animal est tranquille il étend sa queue ; mais il m'a été impossible de vérifier quel usage il peut faire d'une partie si remarquable. Rien n'annonce qu'elle puisse lui servir à la respiration et faire les fonctions de branchies , qui présentent tant de formes bizarres dans les animaux des classes voisines. Je ne vois pas non plus , que ce soit un organe qui puisse servir à tendre des pièges à d'autres animaux plus petits , pour en faire sa nourriture , parcequ'ayant examiné les substances contenues dans ces boyaux , j'ai lieu de croire que cette espèce de ver se nourrit de végétaux qui croissent au fond de la mer.

## ORGANISATION.

Afin de mettre de l'ordre dans la description des organes de cet animal, je commencerai à parler du *système vasculaire*, puis du *système nerveux*, ensuite de l'*appareil alimentaire*, et en dernier lieu des *tégumens*.

## SYSTÈME VASCULAIRE

Les organes principaux du système vasculaire ou de la circulation, sont deux vaisseaux, qui entièrement attachés à l'enveloppe *dermo-musculaire* (c'est-à-dire à la face interne de la couche musculaire et des tégumens) se prolongent de la bouche à l'anus, offrant toujours à-peu-près le même calibre et se montrant à peine un peu plus petits vers la première. De ces deux vaisseaux l'un doit être une artère et l'autre une veine, mais faute de différences bien prononcées, il m'a été impossible de les distinguer. J'ai même observé, qu'il est plus facile de les voir dans les animaux conservés quelque temps dans l'eau de vie, que dans ceux morts depuis peu.

De cette artère, et de cette veine sortent une infinité de vaisseaux extrêmement déliés, qui vont en grand nombre s'insérer dans les intestins, et probablement dans le vaisseau, qui longe une portion du tube alimentaire, comme je le dirai tout à l'heure. Ces petits vaisseaux forment un lacs, un tissu filamenteux d'une finesse extraordinaire, et vont aussi en grand nombre se perdre dans l'enveloppe



*dermo-musculaire*. Un autre vaisseau plus petit, que ladite artère, et que la veine, mais qu'on distingue aisément, parce qu'il se trouve sur un fond bien différent, longe une grande partie du tube alimentaire. Près de l'anüs il communique avec un des susdits vaisseaux, passe ensuite sur le rectum et s'étend sur plus de la moitié des boyaux. Il s'amincit ensuite, et finit par disparaître sur la portion des intestins, qui se trouve plus près de la bouche.

Comme je l'ai déjà remarqué, il reçoit un très-grand nombre de ces vaisseaux extrêmement déliés, qui viennent de l'artère et de la veine. Sur les parois intérieures du sac on découvre aussi des réseaux vasculaires très-fins, comme on en voit dans tous les autres animaux. Il est bon d'observer, que cette disposition du système vasculaire a beaucoup de rapport avec celle des *Holoturies*, des *Oursins*, des *Siponcles*, animaux que j'ai disséqué avec toute la patience qu'exigent des pareilles recherches.

J'ai remarqué plus haut, que je ne croyais pas que la queue avec ses longues dépendances put faire les fonctions d'organe respiratoire. En effet ayant coupé cette partie à un animal vivant, il n'en parût point inquieté, et vecût plus de 24 heures. J'ai eu lieu d'observer que ces animaux exigent une eau bien pure, car lorsque j'en conservais dans l'eau, avec des petits poissons, des mollusques, ou des annellides, j'ai vu que c'étaient ceux-là qui souffraient d'avantage, et que je trouvais morts bien avant les autres, si l'eau n'était pas changée.



Il me paraît que la combinaison de l'oxigène avec le fluide nourricier, qui tient lieu de sang se fait chez ces animaux à la surface de la peau, où, comme je l'ai remarqué, on observe des réseaux vasculaires très-fins, et ou aboutit un très-grand nombre de ces vaisseaux très-déliés, qui sortent de l'artère et de la veine.

#### SYSTÈME NERVEUX.

Tous ceux qui cultivent la Zootomie sont au fait des grandes difficultés qu'on trouve dans la recherche du système nerveux des animaux les plus simples. En conséquence il pourrait se faire, que ce que je vais dire à cet égard, ait besoin d'être rectifié. C'est pour cette raison, que parlant du système nerveux, il est nécessaire que je considère en même tems l'appareil de la locomotion, qui dans cet animal se réduit à deux couches de fibres musculaires très-fines étendues sur les tégumens.

C'est entre le deux vaisseaux, que j'ai décrit les premiers, que j'ai vu un cordon très-mince d'une substance transparente, et gélatineuse, que je crois être un filament nerveux. Celui-ci s'étend de la bouche à l'anus. Je n'ai point observé de ganglions, ou de renflemens ni près de la bouche, ni le long du cordon (qui peut-être se prolonge dans la queue, quoiqu'il m'ait été impossible de l'y découvrir). Ce qui peut faire croire, que ce cordon est une espèce de moëlle épinière, c'est qu'il a le plus grand rapport

avec celle du *Sipunculus nudus*, et que les fibres musculaires sont beaucoup plus épaisses aux deux côtés de la ligne qui parcourt non seulement celui-ci, mais encore l'artère et la veine. En effet le sac formé par les tégumens, et les fibres musculaires est beaucoup plus mince du côté opposé, puisque celles-ci y sont à peine visibles, et que c'est dans cet endroit, qu'elles se déchirent plus facilement après la mort des animaux.

Les fibres musculaires se divisent en deux couches, l'une externe et l'autre interne. Les fibres extérieures qui se trouvent en contact avec les tégumens sont longitudinales, et transversales les intérieures qui touchent les viscères. D'après cette disposition très-simple, il est facile de se rendre raison des mouvemens singuliers qu'exécutent ces animaux. On conçoit aussi qu'ils peuvent aisement se rétrécir dans toutes les parties de leur corps par le moyen des fibres transversales, et se raccourcir à l'aide des fibres longitudinales. Au moyen de ces mêmes couches musculaires, ils peuvent en outre exécuter plusieurs mouvemens composés. Cependant, en réfléchissant que des mouvemens de cette nature ne peuvent pas avoir lieu sans nerfs, il paraît que des nerfs très-minces, et invisibles à cause de leur finesse doivent sortir du dit cordon, se distribuer à toutes ces fibres musculaires, et par conséquent à celle de la queue aussi, qui paraissent encore douées d'une plus grande contractilité. Ayant déjà remarqué qu'il existe une grande analogie entre ces animaux et les siponcles, je puis

aussi par analogie conclure , que des nerfs très-déliés , que j'ai très-bien vu dans ceux-ci , doivent exister dans cette nouvelle espèce.

J'ajouterai , que je n'ai pu découvrir dans ces animaux aucun organe de la vue , ni de l'ouïe ; ainsi ils paraissent n'avoir d'autre sens que ceux du goût et du tact. Ce dernier doit être bien actif dans les appendices de la queue.

#### APPAREIL ALIMENTAIRE.

Le canal alimentaire est un tube très-long, gros, comme une petite plume de corbeau , entortillé en différentes manières. Avec un peu d'attention on le voit se séparer en deux paquets dont l'un communique avec la bouche , et l'autre conduit à l'anus ; tandis qu'ils communiquent entr'eux par une portion d'intestins , qui s'étend de l'extrémité postérieure vers l'antérieure.

Ce long intestin est formé d'une tunique très-mince , quoique probablement elle soit composée de plus d'une membrane. Il pourrait se faire qu'il y existât un péritoine, qu'on découvre aisément dans les Holoturies et dans les Oursins. Extérieurement on n'y découvre presque aucune différence , si ce n'est dans la couleur. Ce n'est , comme j'ai dit ci-dessus , que dans la portion qui conduit à l'anus qu'on trouve le vaisseau longitudinal qui disparaît dans l'autre.

La bouche est très-simple , exactement ronde , et très

contractile. Elle est renforcée par quelques fibres musculaires. Autour de l'anüs il y a des petits faisceaux musculaires qui sont disposés tout au tour en forme de rayons. Dans le canal alimentaire s'ouvrent près de la bouche deux conduits excréteurs qui appartiennent à deux glandes rougeâtres, oblongues, placées à côté de la portion de ce tube qui pourrait s'appeler œsophage. Ces conduits se ramifient comme celui du pancréas de l'homme, et les rameaux sont terminées par des petits grains assez semblables aux grains d'un sable très-fin. On peut regarder ces petits grains comme des follicules sécrétoires. Ils ne sont pas liés ensemble par du tissu cellulaire, de manière que mis dans l'eau ils se séparent, et la glande ressemble à une grappe de raisin.

Au milieu des intestins on découvre une vessie formée d'une membrane très-mince. Elle est remplie d'une eau qui serait très-limpide, si elle n'était pas un peu troublée par la présence d'une grande quantité de petits corpuscules blanchâtres. Cette vessie, qui s'étend au delà des deux tiers de l'animal, se retrécit postérieurement en un conduit, qui s'ouvre séparément tout près de l'anüs dans le dit pli ou fissure, qu'on trouve à la racine de la queue. À l'endroit où le conduit s'épanche pour former la vessie il se détache un pédicule plus mince, qui est terminé par des filamens très-courts, ce qui lui donne l'aspect tantôt d'un pinceau, tantôt d'une fleur semiflosculeuse. J'ai trouvé quelque fois ladite vessie vide et affaissée, et le pinceau

plus petit. Une différence aussi remarquable m'a fait croire, que ces organes soient destinés à la génération, et que les atomes blanchâtres soient des œufs : alors ces animaux seraient des hermaphrodites.

#### TÉGUMENS.

Les tégumens de ces animaux sont parfaitement unis, et s'étendent sur tout le corps et la queue. Comme je l'ai déjà dit, on y voit des lignes transversales, et avec beaucoup d'attention on y découvre des petits tubercules. Il est presque impossible de les détacher des couches musculaires déjà décrites, qui doublent leur face intérieure. Extérieurement ils sont induits d'un mucus verdâtre, qui paraît être continuellement exhalé par ces petits tubercules, qu'on peut regarder comme des follicules muqueux.

#### REFLEXIONS.

La description et les détails anatomiques que j'ai donnés de cet animal singulier mettent hors de doute, qu'il n'a pas été décrit jusqu'à présent, et qu'on peut le regarder comme absolument inconnu aux naturalistes. On peut aussi conclure qu'il n'est pas facile de lui assigner sa véritable place dans l'échelle des êtres organisés.

Au premier aspect, surtout si l'on a égard à sa grande mobilité, on pourrait le prendre pour un annellide, et le

placer très-près de la sangsue ; mais la disposition des vaisseaux, la structure singulière de son canal alimentaire, l'absence de quelques organes, et surtout des anneaux sont autant de raisons pour ne point le comprendre dans cette classe, et pour le réléguer dans les classes inférieures. M'étant beaucoup occupé de la structure des Echinodermes proprement dits, je puis assurer, qu'il s'éloigne de ceux-ci par sa forme également que par son organisation intérieure. Mais comme M. Cuvier dans son règne animal vient d'établir un second ordre d'Echinodermes sous lequel il comprend ses *Molpadies* et ses *Miniades*, ainsi que les *Priapules* de Lamarck et les *Siponcles*, il paraît, que sa véritable place est à côté de ceux-ci, quoiqu'au premier abord on puisse s'apercevoir, qu'il s'éloigne tellement de tous, qu'on ne doit pas hésiter d'en faire un genre particulier.

Pour les mêmes raisons on peut dire qu'il n'a rien de commun avec le *Priapulus caudatus* de Lamarck, puisque cet Auteur, et principalement M. Cuvier d'après Muller donnent à celui-ci des dents à la bouche, un seul intestin qui de la bouche va droit à l'anus, et un système musculaire semblable à celui des Holoturies.

Maintenant s'agissant de donner un nom à l'animal, que j'ai décrit, je me propose de suivre l'exemple de plusieurs naturalistes qu'ils ont appellés les espèces nouvellement découvertes du nom de quelque homme célèbre, et j'ai choisi à cet effet celui d'un savant de notre pays dont les travaux, en même temps qu'ils répandent le goût pour l'histoire



naturelle, reculent les limites de la science. C'est du nom de notre collègue le Professeur Bonelli, que je déduirai la désignation générique de cet animal, et que j'appellerai *Bonellie*. D'après ce que j'ai dit plus haut, son caractère générique pourrait être le suivant :

*Bonellia.*

*Corpus oblongum summopere contractile, cauda longa in duas lacinias divisa praeditum. Os simplicissimum ad anticum extremum positum.*

*Bonellie.*

» Corps oblong cylindrique très-  
» contractile, bouche très-simple à  
» l'extrémité antérieure. A la posté-  
» rieure queue bifide.

*Bonellia viridis.*

*B. Corpore aequali, levi: cauda longa complanata lacinis membranaceis marginis interno obscuriori, undulato, lobato. Habitat in littoribus Sardiniae et Genuae.*

*Bonellie vert.*

» Corps très-lisse, queue longue ap-  
» platie divisée en deux cordons avec  
» le bord intérieur plus foncé mem-  
» braneux ondulé, et festonné. Habite  
» les côtes de la Sardaigne et de Gênes.

Peu de temps après que j'avais trouvé le *Bonellie vert* un pêcheur m'apporta un animal, qui avait avec celui-ci bien des rapports, mais comme il était conservé dans l'esprit de vin, et que je n'avais jamais pu avoir que ce seul exemplaire, je ne puis rien dire sur son état naturel, parceque, comme on sçait, ces animaux si tendres changent beaucoup en les conservant dans les liqueurs spiritueuses. Ainsi m'étant proposé de garder cet animal, je me

suis borné à ne faire qu'une petite ouverture pour voir si les viscères différaient beaucoup de ceux de la Bonellie vert, et j'ai observé que les intestins étaient un peu plus gros, mais entortillés à-peu-près de la même manière; les parois du sac paraissaient un peu plus épais et plus fermes. D'après l'assertion du pêcheur, la couleur n'avait pas beaucoup changée, elle était seulement un peu plus éclaircie par l'action de la liqueur spiritueuse.

Il avait trouvé cet animal dans ces filets sur les côtes de la Sardaigne à peu de distance d'Alghero. Je définis cet animal.

*Bonellia fuliginosa.*

*Bonelle brunâtre.*

<i>B. Corpore fusiformi tuberculato.</i>	» Corps fusiforme parsemé de très-
<i>Cauda et laciniis teretibus apicibus</i>	» petits tubercules, queue ronde,
<i>subglobosis. Habitat in littoribus Sar-</i>	» ainsi que les deux cordons, qui sont
<i>diniae.</i>	» terminés par un globule charnu.
	» Habite les côtes de la Sardaigne.

## EXPLICATION DES FIGURES.

## TABLE XIV.

*Figure I.*

Représente un Bonellie vert de grandeur naturelle dessiné d'après un des plus gros que j'aye vu. A son extrémité antérieure on voit la bouche sous la forme d'un trou rond très-simple. Son corps est rétréci en trois endroits.

*Figure II.*

Le même animal qui présente son extrémité antérieure beaucoup allongée, et rétrécie, en outre deux autres rétrécissemens, ce qui fait que l'animal présente trois bosses bien distinctes.

- a. Vessie, qui sort de la fissure (b) qui se trouve à la racine de la queue, où se cache l'anus. Ladite vessie est celle que je regarde comme organe de la génération, et qui était remplie de corpuscules blanchâtres, qui pourraient être des œufs. Je crois que cette vessie est sortie du ventre à cause des contractions trop fortes du sac.

*Figure III.*

Représente un Bonellie vert presque dans son état de tranquillité. Au milieu du corps on y observe une tâche

brunâtre qui parut quand l'animal souffrait. En ce même endroit les parois dermo-musculaires devenaient minces et transparens de manière qu'à travers on voyait les boyaux se mouvoir.

## TABLE XV.

*Figure IV.*

*Bonellie brunâtre* fusiforme.

- a. Bouche située à l'extrémité antérieure.
- b. Anus un peu éloigné de la queue.
- c. Membrane qui s'étend d'un cordon à l'autre. Ceux-ci sont terminés par un tubercule globuleux.

*Figure V.*

Un *Bonellie vert* ouvert pour mettre en vue les viscères. Le tout est de grandeur naturelle.

- a. Espèce de glande salivaire, qui avec son conduit s'ouvre dans l'œsophage.
- b. La même glande du côté opposé, dans laquelle les follicules sont séparées pour faire voir que les petits grains avec leur conduite ont la forme d'une grappe de raisin.
- c. Bouche très-simple ouverte.
- d. OEsophage très-peu différent du tube alimentaire.
- e. Canal alimentaire tout entortillé.

- f.* Dernière portion dudit canal ou *rectum*.
- g.* Anus.
- h.* Les deux vaisseaux longitudinaux. On peut considérer l'un comme une artère, et l'autre comme une veine.
- i.i.i.* Vaisseaux extrêmement déliés qui forment un *lacis*, ou tissu très-fin. En examinant avec attention on voit pourtant, que ces vaisseaux vont s'implanter en partie dans les parois de l'enveloppe, ou du sac dermo-musculaire, et en partie dans les intestins. Il est très-difficile de dessiner exactement ces tissus vasculaires dans lesquels pourtant les vaisseaux sont parallèles.
- k.* Vessie oblongue à parois très-minces avec son conduit qui s'ouvre à côté de l'anüs.
- l.* Organe sous forme de pinceau, ou de fleur sémisfloculeuse, qui sort entre la vésicule, et son conduit.
- m.* Queue coupée pour mieux faire voir le pli ou fissure, qu'on découvre à cet endroit.
- n.n.* Parois du sac dermo-musculaire, qui contient les viscères. Ces parois sont formés extérieurement par les tégumens, et intérieurement par deux couches de fibres musculaires longitudinales, et transversales.

*Figure vi.*

Le même animal ouvert comme ci-dessus mais grossi.

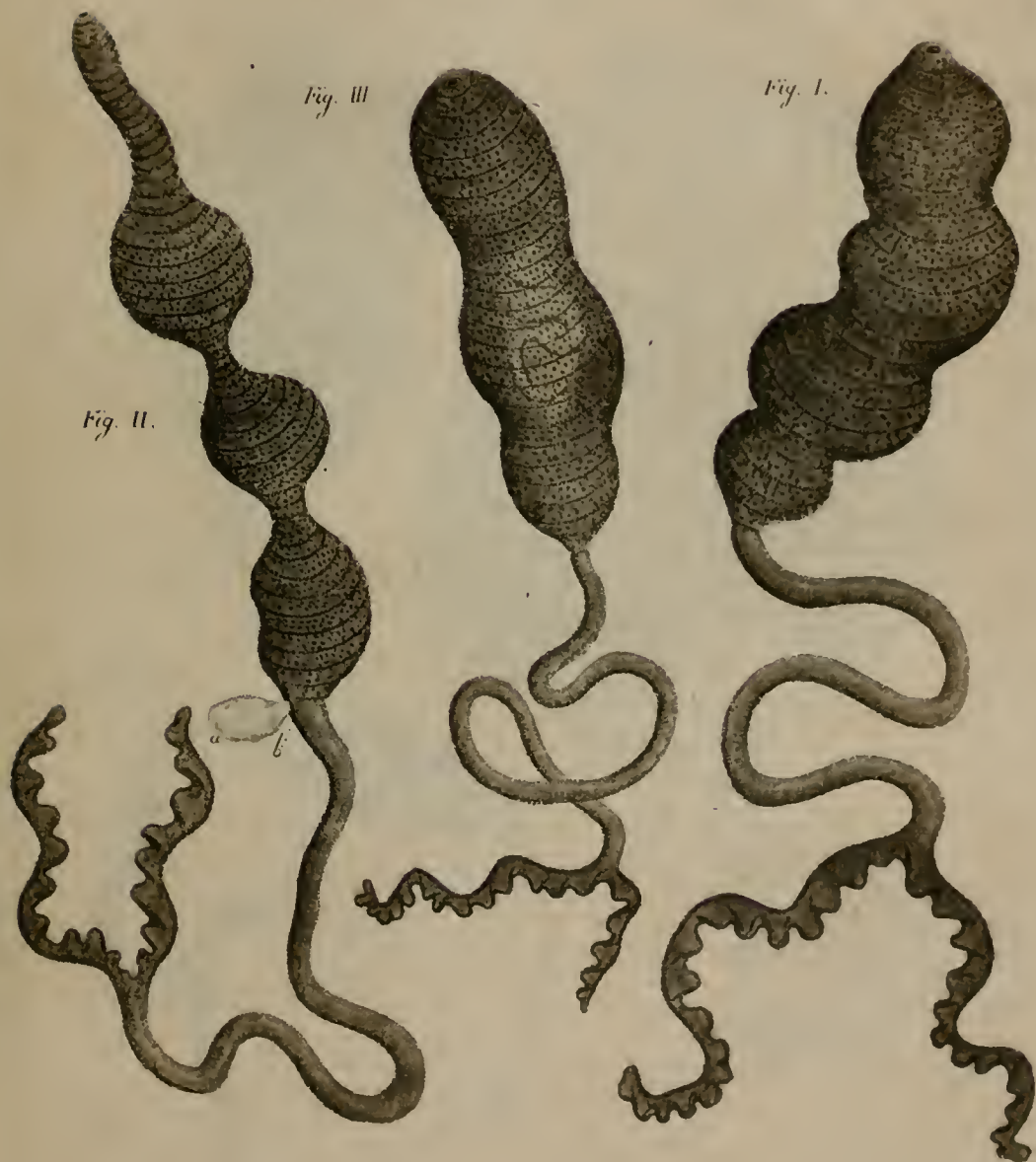
*a.b.c.d.* Représentent les mêmes objets, que dans la figure précédente.

- e.* Boyau ou tube alimentaire.
- e<sup>1</sup>* Paquet des intestins qui tient à l'œsophage, et à la portion intermédiaire.
- e<sup>2</sup>* Portion de l'intestin qui de la partie postérieure se dirige vers l'antérieure, et se continue avec le paquet des intestins qui vont à l'anus.
- e<sup>3</sup>* Paquet des boyaux qui vont à l'anus.
- f.* Fibres ou fascicules musculaires disposés en rayons autour de l'anus.
- g.* Vaisseau, qui longe l'intestin.
- h. i.* Les mêmes objets, comme dans la figure précédente. C'est entre les deux vaisseaux qu'on découvre le cordon gélatineux qui doit être considéré comme un filament nerveux, ou comme la moëlle épinière.
- k.* La vessie oblongue que je croiois être un organe de la génération. Elle étoit pliée et entrelacée avec les intestins. Ici elle est tirée de la cavité pour laisser voir les autres viscères.
- l.m.n.* Comme dans la figure précédente.

*Figure VII.*

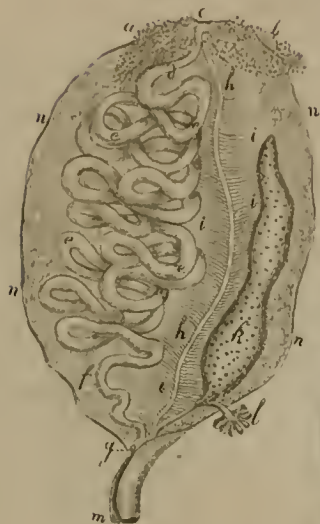
Représente la vescicule avec son pinceau, que je crois appartenir aux organes de la génération, parce que dans quelques individus je les ai observés beaucoup plus petits, et ainsi flétris.



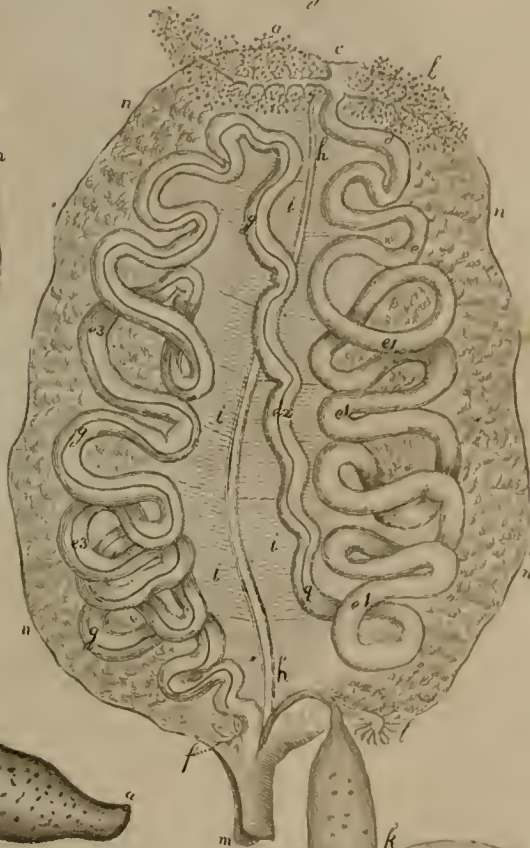




*Fig. V.*



*Fig. VI.*

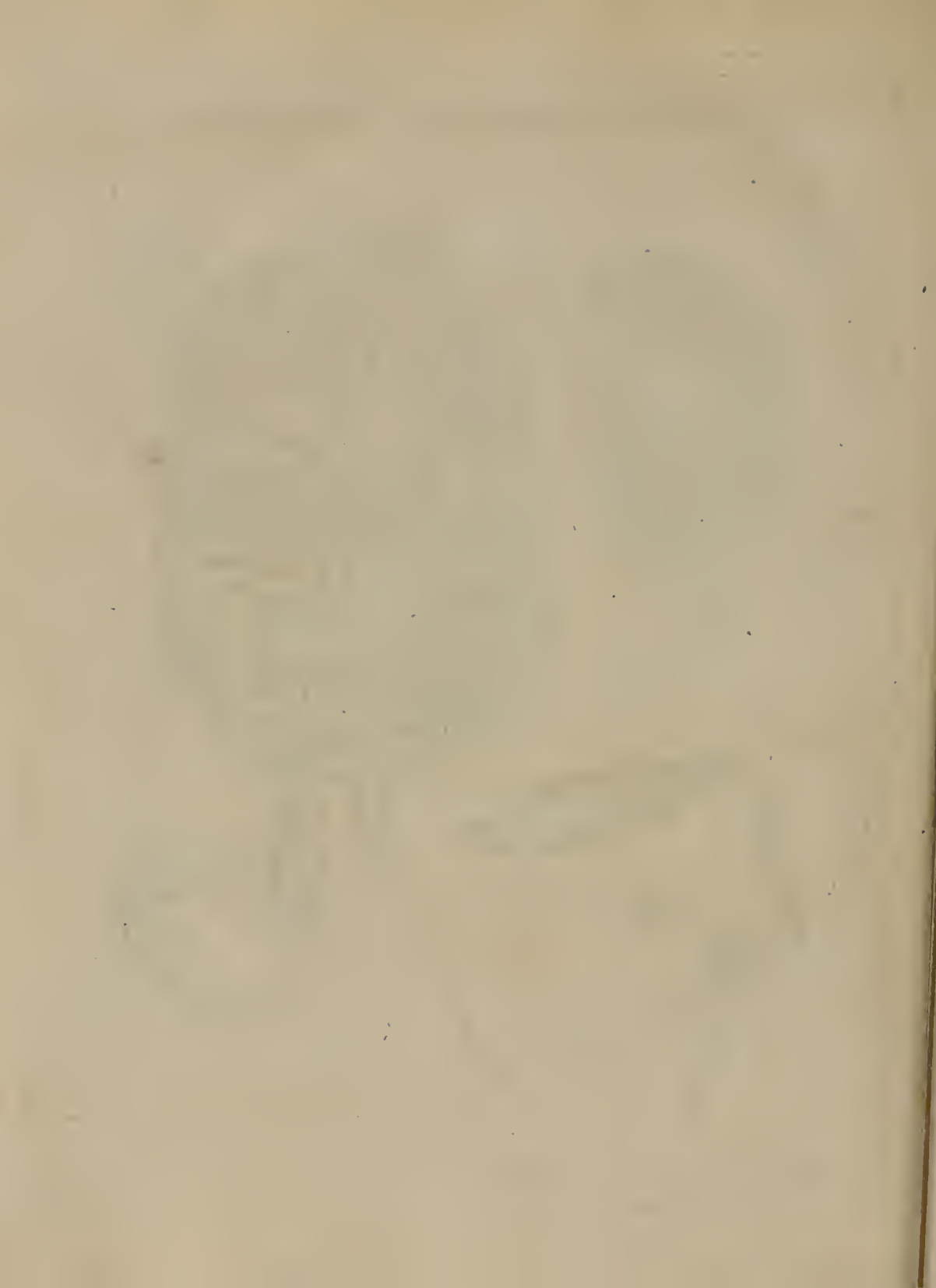


*Fig. VII.*



*Fig. VIII.*





# ADDITION À LA NOTE

SUR L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION  $\frac{dy}{dx^2} + gx^m y = 0$ .

PAR M. PLANA.

Il est utile de rapprocher de l'équation traitée dans la seconde partie de cette note l'équation différentielle,

$$\frac{dy}{dx^2} + y \left( g + \frac{f}{x} \right) = 0,$$

laquelle peut être intégrée complètement par les quadratures dans un cas fort-étendu; savoir, lorsque l'on a  $g = -m^2$ ,  $f = -2mp$ , le nombre  $p$  étant entier, positif ou négatif, et la quantité  $m$  étant d'ailleurs quelconque.

Considérons donc l'équation

$$(\beta') \dots \frac{dy}{dx^2} - y \left( m^2 + \frac{2m.p}{x} \right) = 0.$$

En y faisant,

$$y = A.e^{\int (z-m) dx},$$

et regardant  $A$  comme une constante arbitraire l'on obtient la transformée du premier ordre

$$\frac{dz}{dx} + z^2 - 2mz - \frac{2mp}{x} = 0.$$

Maintenant si l'on pose,

$$x = \frac{1}{2mX}; \quad z = -2mp.XY,$$

l'on trouve entre les nouvelles variables  $X$ ,  $Y$  cette équation différentielle,

$$(\beta'') \dots \frac{X^2}{Y^2} \cdot \frac{dY}{dX} + \frac{X+1}{Y} + pX - \frac{1}{Y^2} = 0,$$

TOM XXVI.

B b b b

indépendante du coefficient  $m$ , et telle qu'on peut l'intégrer par une méthode fort-ingénieuse donnée par M. LEGENDRE dans le 3.<sup>e</sup> Volume des Exercices du calcul intégral (Voyez p. 439-462).

Pour appliquer cette méthode à ce cas particulier, il faut remarquer, que l'équation plus générale,

$$(\beta''') \dots \frac{X^2}{Y^2} \cdot \frac{dY}{dX} + \frac{qX+1}{Y} + pX - \frac{1}{Y^2} = 0,$$

( $q$  désigne un coefficient constant) jouit de ces deux propriétés remarquables: 1.<sup>o</sup> En y faisant

$$\frac{1}{Y} = 1 + (q+p)XY,$$

l'on obtient la transformée,

$$\frac{X^2}{Y_1^2} \cdot \frac{dY_1}{dX} + \frac{(1-q)X+1}{Y_1} + (p+q)X - \frac{1}{Y_1^2} = 0,$$

laquelle est, comme l'on voit, tout-à-fait semblable à la proposée, avec la seule différence que les coefficients  $q$  et  $p$  ont été respectivement changés en  $1-q$  et  $p+q$ : 2.<sup>o</sup> En faisant dans la même équation

$$\frac{1}{Y_1} = 1 + pXY$$

l'on obtient encore une transformée semblable, savoir;

$$\frac{X^2}{Y_1^2} \cdot \frac{dY_1}{dX} + \frac{(1-q)X+1}{Y_1} + (q+p-1)X - \frac{1}{Y_1^2} = 0.$$

Il suit de là;

1.<sup>o</sup> Que dans le cas particulier de l'équation ( $\beta''$ ); si l'on employe la première de ces deux transformations l'on aura, entre les transformées successives, le système suivant d'équations;





Donc, toutes les fois que le nombre  $p$  sera entier et négatif l'on pourra, en employant le premier système d'équations, ramener l'intégration de l'équation  $(\beta'')$  à l'intégration d'une équation semblable à celle qui se déduit de l'équation  $(\beta'')$  en  $\gamma$  faisant à la fois  $q=1$ ,  $p=-1$ ; c'est-à-dire qu'il suffit d'intégrer une équation de la forme

$$\frac{X^2}{Y^2} \cdot \frac{dY}{dX} + \frac{X+1}{Y} - X - \frac{1}{Y^2} = 0.$$

Or, en cela il n'y a point de difficulté, puisque cette équation, en y faisant  $\frac{1}{Y} = 1 + XZ$  prend la forme linéaire,

$$d \cdot \frac{1}{Z} - \frac{1}{X^2} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{1}{X},$$

de sorte que l'on a en intégrant,

$$\frac{1}{Z} = e^{-\frac{1}{X}} \left\{ \int e^{\frac{1}{X}} \frac{dX}{X} + C \right\}$$

$C$  désignant une constante arbitraire.

Lorsque le nombre  $p$  sera entier et positif on pourra toujours, à l'aide du second système des équations précédentes, ramener la question à intégrer une équation de la forme

$$\frac{X^2}{Y^2} \frac{dY}{dX} + \frac{X+1}{Y} - \frac{1}{Y^2} = 0,$$

laquelle étant linéaire donne, en l'intégrant, et désignant par  $C'$  la constante arbitraire;

$$Y = e^{\frac{1}{X}} \frac{1}{X} \left\{ \int e^{-\frac{1}{X}} \frac{dX}{X} + C' \right\}.$$

Il est donc démontré, que l'on pourra toujours obtenir par les quadratures l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{dy}{dx} - y \left( m^2 + \frac{2mp}{x} \right) = 0$$

pourvu que  $p$  soit un nombre entier positif ou négatif. Il ne sera pas inutile d'avoir fait remarquer les réductions que la méthode de M. LEGENDRE présente dans ce cas particulier, qui a l'avantage de se rattacher à une équation du second ordre assez importante.

Au reste, la méthode de M. LEGENDRE que nous venons d'appliquer à ce cas particulier est propre à fournir l'intégrale complète de l'équation du second ordre,

$$\frac{dy}{dx^2} + y \left( Ax^m - Bx^{2m+2} \right) = 0,$$

dans tous les cas, où après avoir décomposés les coefficients  $A$  et  $B$  de manière que l'on ait,

$$A = \frac{p(m+1)}{2(m+2)} - pq; \quad B = \frac{p}{2(m+2)},$$

l'on verra que l'un ou l'autre de deux nombres

$$q, \quad \frac{1}{m+2} + q,$$

est entier positif ou négatif.

Alors en faisant,

$$y = C.e^{-\frac{px^{m+2}}{2(m+2)}} \int z dx$$

$$x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m+2} \cdot (m+2) \cdot X; \quad \frac{2}{m+2} - \frac{1}{m+2};$$

$$z = -qp \cdot \frac{1}{m+2} \cdot (m+2) \cdot X \cdot Y; \quad \frac{m}{m+2} - \frac{1}{m+2};$$

l'on obtiendra entre les nouvelles variables  $X, Y$  la transformée du premier ordre ;

$$\frac{X^2}{Y^2} \cdot \frac{dY}{dX} + \frac{X \cdot (m+2)^{-1} + 1}{Y} + qX - \frac{1}{Y^2} = 0,$$

laquelle jouit des deux propriétés énoncées plus haut relativement à l'équation désignée par  $(\beta''')$ .

Je reviens maintenant sur l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{k \cdot k+1}{x^2} \cdot y, \text{ pour faire voir que l'on peut en obtenir l'intégrale complète, sous forme finie, même dans les cas où } k \text{ n'est pas un nombre entier. Il suffit, pour cela, de sommer par des intégrales définies les deux suites,}$$

$$P = 1 + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^4} + \dots ;$$

$$Q = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^3} + \frac{B_3}{x^5} + \dots ;$$

où  $A_1, A_2, A_3 \dots ; B_1, B_2, B_3 \dots$  sont des fonctions de  $k$  telles qu'on les voit à la page 537. En faisant pour plus de simplicité ;

$$Z = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{2k-1}{2}} \cdot e^{\frac{-(1+z^2)}{2nz}} ; \quad Z' = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot e^{\frac{-(1+z^2)}{2nz}} ;$$

il est démontré dans le premier volume des Exercices de C. Int: par M. LEGENDRE ( p. 396 ), que  $k$  étant un nombre entier, et  $n$  une quantité quelconque *positive*, l'on a cette équation ;

$$(\gamma) \dots Z = Z' \cdot \{ 1 + B_1 n - A_1 n^2 - B_2 n^3 + A_2 n^4 + B_3 n^5 - \dots \}.$$

Il est facile de prouver par l'analyse même de M. LEGENDRE, que cette équation subsiste, en changeant  $n$  dans la quantité imaginaire  $\frac{1}{n\sqrt{-1}}$ : alors, la formule

$$Z' = 2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{n}} \int_0^{\infty} dy \cdot e^{-\frac{y^2}{n}},$$

que M. LEGENDRE trouve à la fin de la pag. 364 devient,

$$Z' = 2^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} \cdot \int_0^{\infty} dy [\cos(ny^2) - \sqrt{-1} \sin(ny^2)]:$$

donc, en posant  $ny^2 = u$ , il viendra;

$$Z' = \frac{V_2 \cdot e^{-n\sqrt{-1}}}{V_n} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \frac{du \cos u}{\sqrt{u}} - \sqrt{-1} \cdot \int_0^{\infty} \frac{du \sin u}{\sqrt{u}} \right\};$$

d'où l'on tire, par les valeurs connues de ces intégrales;

$$Z' = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} (1 - \sqrt{-1}),$$

ou bien;  $Z' = M - N\sqrt{-1}$ ,

en faisant pour plus de simplicité;

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{n}} (\cos n - \sin n); \quad N = 2 \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot \sin n.$$

En changeant  $n$  en  $\frac{1}{n\sqrt{-1}}$  dans l'intégrale  $Z$ , il est clair que l'on a,  $Z = V - V' \cdot \sqrt{-1}$ , en posant;

$$V = \int_0^{\infty} dz \cdot z^{\frac{2k-1}{2}} \cdot \cos \left[ \frac{n(1+z^2)}{2z} \right];$$

$$V' = \int_0^{\infty} dz \cdot z^{\frac{2k-1}{2}} \cdot \sin \left[ \frac{n(1+z^2)}{2z} \right].$$

Il suit de-là que l'équation ( $\gamma$ ) donne ;

$$\frac{V-V'\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{A_1}{n^2} + \frac{A_2}{n^4} + \frac{A_3}{n^6} + \dots\right) - \sqrt{-1} \cdot \left(\frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{B_3}{n^5} + \dots\right).$$

Donc, en comparant les quantités réelles et imaginaires, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{MV + NV^1}{M^2 + N^2} &= 1 + \frac{A_1}{n^2} + \frac{A_2}{n^4} + \frac{A_3}{n^6} + \dots = P; \\ \frac{MV^1 - NP}{M^2 + N^2} &= \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{B_3}{n^5} + \dots = Q. \end{aligned}$$

En supposant  $k$  nombre entier, ces deux équations donneraient les valeurs des intégrales définies  $V, V'$ ; car l'on en tire ;

$$V = MP - NQ; \quad V' = MQ + NP,$$

où les expressions de  $P, Q$  sont censées connues.

Nous avons trouvé ( p. 536 ) ;

$$y = P_1 \cdot (a \sin x + b \cos x) + Q_1 (a \cos x - a \sin x),$$

en désignant par  $P_1, Q_1$  ce que deviennent respectivement  $P, Q$  par le changement de  $n$  en  $x$ . Ainsi l'on a ;

$$y = a (P_1 \sin x + Q_1 \cos x) + b (P_1 \cos x - Q_1 \sin x),$$

ou bien,

$$\begin{aligned} y &= \frac{a(M \sin x - N \cos x) \cdot V + a(M \cos x + N \sin x) \cdot V^1}{M^2 + N^2} \\ &+ \frac{b(M \cos x + N \sin x) \cdot P - b(M \sin x - N \cos x) \cdot V^1}{M^2 + N^2}, \end{aligned}$$

en ayant soin de remplacer  $n$  par  $x$ . Donc, en substituant pour  $M, N$  leurs valeurs précédentes il viendra ;

$$\begin{aligned} y &= a \sqrt{\frac{x}{\pi}} \cdot \left\{ \frac{-\sin x (\sin x + \cos x) \cdot V + (1 + \sin^2 x - \sin x \cos x) \cdot V^1}{3 - \sin 2x - \cos 2x} \right\} \\ &+ b \sqrt{\frac{x}{\pi}} \cdot \left\{ \frac{(1 + \sin^2 x - \sin x \cos x) \cdot P + \sin x \cdot (\sin x + \cos x) \cdot V^1}{3 - \sin 2x - \cos 2x} \right\}; \end{aligned}$$



où l'on a ;

$$V = \int_0^\infty dz. z^{k-\frac{1}{2}} \cos \left[ \frac{x(1+z^2)}{2z} \right];$$

$$V' = \int_0^\infty dz. z^{k-\frac{1}{2}} \sin \left[ \frac{x(1+z^2)}{2z} \right].$$

Telle est l'expression de  $\gamma$  qu'il faut regarder comme la véritable intégrale complète de l'équation  $\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \gamma = \frac{k(k+1)}{x^2} \gamma$ , quelle que soit la valeur de  $k$ .

On doit remarquer, que en posant  $k(k+1)=\alpha$ , et considérant  $\alpha$  comme une quantité donnée, il en résulte deux valeurs différentes par  $k$ , savoir  $k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}$ : mais cette ambiguïté disparaît des intégrales définies  $V$  et  $V'$ ; car en les considérant comme des fonctions de  $k$ , et faisant  $V=f(k)$ ,  $V'=f'(k)$ , il est aisé de prouver, (Voyez Tome cité de M. LEGENDRE p. 366 et 367) que la nature de ces fonctions est telle que l'on a  $f(-k)=f(k-1)$ ;  $f'(-k)=f'(k-1)$ : d'où il suit que ;

$$f\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}\right) = f\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}\right),$$

$$f'\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}\right) = f'\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}\right).$$

Si l'on avait quelques doutes sur la vérité de l'équation  $Z_{(1)} = (1+n). Z_{(0)}$ , que M. LEGENDRE trouve à la page 366 lorsque  $n$  est changé dans  $\frac{1}{n\sqrt{-1}}$ , il serait facile de les faire disparaître en partant de l'équation

$$Z_{(1)} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \int_0^\infty (1+2y^2) e^{-\frac{y^2}{n}} dy,$$

rapportée dans la page précédente, laquelle devient par ce changement, et en posant  $ny^3 = u$ ;

$$Z_{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \left( 1 + \frac{2u}{n} \right) (\cos u - \sin u \cdot \sqrt{-1}).$$

Or l'on sait, que

$$\int_0^\infty du \sqrt{u} \cdot \cos u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}; \quad \int_0^\infty du \sqrt{u} \sin u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

partant nous avons

$$Z_{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} (1 - \sqrt{-1}) - \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} \left( \frac{1 + \sqrt{-1}}{n} \right);$$

ou bien;

$$Z_{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-n\sqrt{-1}} (1 - \sqrt{-1}) \cdot \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt{-1}} \right).$$

**MEMORIE**  
**DELLA CLASSE**

**DI**

**SCIENZE MORALI; STORICHE E FILOLOGICHE.**

THE  
STANDARD  
OF  
THE  
COURT  
OF  
COMMONS  
IN  
PARLIAMENT ASSEMBLED  
IN  
THE  
YEAR OF OUR LORD ONE THOUSAND  
EIGHT HUNDRED AND SEVENTY-NINE

# DEL TERRITORIO PIRAICO

ILLUSTRAZIONE DEL LUOGO DI TUCIDIDE

LIB. III. N.º 91

DEL SIGNOR AMEDEO PEYRON

PROFESSORE DI LINGUE ORIENTALI.

*Letta nell' Adunanza delli 21 febbrajo 1822.*

---

**M**entre da qualche anno io attendo a recare nella lingua Italiana la nobilissima istoria di Tucidide, ed a quest'uopo io vo esaminando quanto sopra tale difficilissimo scrittore ebbero a notare i più valenti ellenisti; osservai talora, che vi si incontrano luoghi manifestamente corrotti, senza che o difficoltà od errore dai filologi vi si sia sospettato mai. A tal genere appartiene il luogo del libro III. N.º 91, che io, senza più stare in sugli inutili precamboli, imprendo a correggere, e ad illustrare.

Così scrive Tucidide: *In quella medesima state gli Ateniesi mandarono trenta navi a correre le coste del Peloponneso sotto la condotta di Demostene figlio di Alcistene, e di Procle figlio di Teodoro. Ne spedirono inoltre altre*

sessanta contro Melo con due mille opliti capitanati da Nicia di Nicerato con intendimento di sottomettere i Melii, i quali essendo isolani ricusavano di prestare obbedienza, e di entrare nella lega. Ma poichè, dopo avere saccheggiata la contrada, i Melii non si arrendevano, salpando da Melo si dirizzarono ad Oropo τῆς πέναν γῆς. Le quali parole niente altro possono significare se non se ad Oropo della opposta terra. Infatti il traduttore latino spiega ad Oropum, quod est e regione; il Levesque, ed il Gail tralatarono à Orope, qui est en face de cette ile; l' Hobbes to Oropus in the opposite continent; lo Smith to Oropus on the opposite shore; e l' Heilmann auf Oropus, auf dem gegenüber gelegenen festen Lande. Che se io consulto gli annotatori cominciando dallo Stefano, e venendo sino ai recenti Bredow, Benedict, Poppo, ed Haack, io trovo, che su questo passo hanno conservato un tal profondo silenzio, il quale annunzia, che niuna difficoltà vi seppero sospettare. Eppure chiunque dando un'occhiata alla carta geografica osservi l'isola di Melo, poi la città di Oropo sui confini dell'Attica e della Beozia, costui non dubiterà di affermare essere questo luogo quant' altri mai corrottissimo. Come mai Oropo assai indentrata nel golfo d'Eubea puossi dire opposta a Melo, ovvero rimpetto a Melo? Chi di noi pensatamente scriverebbe Corfù rimpetto a Venezia, ovvero Corfù opposta ad Ancona? Ben io vedo, che l'isola di Melo giace rimpetto alla Laconia; ma che Oropo sia



l' ἡ πέραν γῆ rispetto a Melo, anche a malgrado di tutti gli editori, ed illustratori di Tucidide non posso farmene capace mai, conoscendo quanto Tucidide sia in ogni sua parola accuratissimo. Infatti soggiunse egli il genitivo τῆς πέραν γῆς per qualificare l'Oropo della Beozia, e distinguerla da parecchie altre Greche città dello stesso nome. Ma l' ἡ πέραν γῆ come mai varrà a distinguere l'Oropo della Beozia dall'Oropo dell'Argolide?

Per le quali cose io non dubito di emendare il luogo di Tucidide leggendo ἐς Ὀρωπὸν τῆς Πειραιῆς in vece dell' ἐς Ὀρωπὸν τῆς πέραν γῆς. La consonanza tra l'una e l'altra lezione è somma; i copisti dalla rarissima voce Πειραιῆς facilmente passarono alle due volgarissime πέραν γῆς; la lezione Πειραιῆς è la sola, che in una maniera degna di Tucidide, possa con esattezza geografica qualificare la città di Oropo, avvegnachè Oropo era posta nel territorio Piraico.

Ed in vero Tucidide II. 23. narrando, siccome i Peloponnesii dopo aver guastata l'Attica tornavansi per la Beozia a casa, dice: παριόντες δὲ Ὀρωπὸν, τὴν γῆν τὴν Πειραιῶν καλεμένην, ἣν νέμονται Ὀρώπιοι Ἀθηναίων ὑπῆκοι, ἐδήωσαν *passando presso Oropo saccheggiarono il territorio detto Piraico abitato dagli Oropii sudditi d'Atene.* Dunque per testimonianza di Tucidide medesimo Oropo giace nella contrada Piraica; epperò rigorosamente geografica, e verissima sarà la lezione ἐς Ὀρωπὸν τῆς Πειραιῆς. E non che verissima, ma ella è necessaria. Imperocchè sappiamo da Stefano Bizantino, che nella

Macedonia, nella Beozia, nell' Eubea, nella Siria, nell' Argolide, nella Tesprozia, ed altrove esistevano città denominate Oropo. Però scrivendo Tucidide, che Nicia dall' isola di Melo salpò per Oropo, lascierebbe luogo a dubitare qual Oropo egli intendesse, seppure il nome del territorio non avesse soggiunto. Ma Tucidide suole soggiungerlo; del che, per tacere d' altri luoghi, io ne arrecherò un esempio tolto da questo stesso paragrafo, là dove scrive *ἐς Τάναγραν τῆς Βοιωτίας* a *Tanagra della Beozia*. Perchè mai non avrà egli usata una pari accuratezza allegando il nome di Oropo comune ad altre città?

E qui io porrei fine alle mie osservazioni stimando d' avere dimostrata verissima una tal correzione, ed averla comprovata colla testimonianza di Tucidide medesimo. Se non che un testo di Stefano Bizantino oscurò per modo e Tucidide, e la voce *Πειραιῶν*, che il territorio Piraico non più si vede in molte carte geografiche per ogni altro conto ragguardevolissime. Il passo di Stefano è il seguente (ad v. *Ἰσθμὸς*): *Ἀριστοτέλης γὰρ τὸν Ὀρωπὸν Γραιὸν φησι λέγεσθαι. Ἡ δὲ Γραιά, τόπος τῆς Ὀρωπίας, πρὸς τῇ θαλάσῃ καὶ Ἐρετρίας καὶ Εὐβοίας κειμένη . . . Θουκυδίδης δευτέρῃ: Παρίοντι Ὀρωπὸν τὴν Γραικὴν καλεσμένην, ἣν νέμονται Ὀρώπιοι Ἀθηναίων ὑπήκοοι, ἐδήλωσαν.* Dice Aristotile, che Oropo era denominata Grea. È Grea un luogo dell' Oropia posto presso al mare d' Eretria e d' Eubea . . . Tucidide nel libro secondo scrive: passando presso Oropo chiamata Greca coltivata dagli Oropii sudditi d' Atene, devastarono.

Stefano pertanto nel libro II di Tucidide in cambio di Πειραικὴν lesse Γραικὴν, e per la testimonianza di Aristotele Grea è l'antico nome di Oropo. Tanto bastò, perchè tutti gli annotatori di Stefano sentenziassero come erronea la voce Πειραικὴν di Tucidide; alla qual opinione si accostarono di poi l'Hudson, il Gottleber (ad Thucyd.), il Politi (ad Eustath. Iliad. B. 498), l'Heyne (ad Iliad. l. c.), ed altri. Debbo adunque esaminare la sincerità della lezione Πειραικὴν nel lib. II siccome quella, che è controversa da molti.

Tutti i codici di Tucidide vanno d'accordo nel leggere Πειραικὴν. Che se i copisti negli antichi testi avessero incontrato il vocabolo Γραικὴν noto a chiunque sa di Greco, non mai l'avrebbero stravolto, ed arricchito massimamente di una sillaba πει; avvegnachè gli errori sogliono per lo più cadere sopra voci rare, disusate, e queste allora, anzichè ricevere incrementi di sillabe, sogliono essere mutilate. Parmi pertanto più probabile, che Πειραικὴν fosse l'antica lezione, vocabolo non più commemorato da verun altro scrittore. D'altronde duro mi si fa a credere, che per la sconsigliata sbadataggine degli scrivani la voce Πειραικὴν sia degenerata nella Γραικὴν, voce non che greca, ma di qualche probabilità in un contesto, che ragiona di Oropo; imperocchè giungemi nuovo, che il πει confondere si possa col γ per sola disattenzione d'uno scrivano. Inoltre nel libro terzo non vi si potendo mantenere il πέραν γῆς, qual

lezione riporvi dovremo? Forse γραικῆς? ma è troppo dissonante; per lo contrario è consonantissimo il Πειραικῆς, donde per varie mende si passò a πέραν γῆς.

Per le quali cose io porto opinione, che Stefano Bizantino, non sulla fede dei codici da lui consultati abbia introdotta la sua lezione Γραικῆν, ma pensatamente, e per geografiche ragioni da lui pregiudicate. Non meno di noi gli antichi esercitavano la critica correttiva, ma in ciò differivano, che dove noi con annotazione avvertiamo il lettore del mutato testo, essi cambiavano il testo senza apporvi alcuna nota, che lo indicasse. Di tal critica, che tacitamente emenda i testi, ne abbiamo altrettanti esempi, quante sono le edizioni del secolo XV; gli editori stampavano, e ad un tempo emendavano i codici, senza farne avvertito il lettore. E per dir breve: ora io emendo nel libro terzo Πειραικῆς in vece di πέραν γῆς, ma ne arredo i motivi: Stefano per critica geografica ripose nel libro secondo Γραικῆν dove stava Πειραικῆν, ma tacendone le ragioni, siccome allora fare si soleva. Che se a qualcuno non mette bene il supporre Stefano tacito emendatore, costui può altresì conghietturare, che il Bizantino abbia a memoria citato il passo di Tucidide. Ben è diritto, anzi è cortesia l'accagionare l'infedele reminiscenza di Stefano dei molti errori commessi nel citare un tal passo. Ripetiamolo: παρίοντι Ὀρωπὸν τὴν Γραικὴν καλεσμένην, ἣν νέμονται Ὀρώπιοι Ἀθηναίων ὑπὸχοι, ἐδήλωσαν. Il παρίοντι vi sta a pigione, rifatto questo in παρίοντες, ne esce

questo senso : *passando presso Oropo chiamata Greca coltivata dagli Oropii sudditi d' Atene, devastarono*. Che mai? Devastarono certamente Oropo. Valeadire quell' Oropo cotanto importante per signoreggiare lo stretto e l' isola d' Eubea , fonte di perpetue gare fra Atene e Tebe , stata non mai espugnata dai Tebani , che per solo tradimento finalmente l' ottennero ( Thucyd. VIII. 60 ) ; quell' Oropo era adunque talmente sguernita di fortificazioni , che i Peloponnesii nel ripatriare passandovi a stormo , così per soprappiù la presero , poi , come fosse un nonnulla , devastata l' abbandonarono. Tale assurdità ci narra pure Stefano infedele citatore di Tucidide. Ora chi fu smemorato a tale di tralasciare alcune necessarie parole , non potrà egli credersi capace di avere con pari smemoratezza guastato il vocabolo Πειραιήν ? ed introdottovi il Γραικῶν , che cotanto bramava di trovare in prossimo contesto con Oropo ?

Sì Stefano bramava di trovare congiunto con Oropo il vocabolo Γραια , od un qualche suo derivato. Conciossiachè la denominazione Ἑλλὰς essendo in un colla virtù Ellenica andata in disuso , ed introdottosi colle armi Latine il nome *Graecia* , e *Graeci* , si mosse quistione sull' origine di tal voce. Questa per lo più derivavasi da un pronipote di Pelasgo detto Γραικός , il quale aveva nelle vicinanze della Ftiotide fondato un regno ; quindi o nella Ftiotide , o non guari lungi cercavasi un qualche nome geografico , che di tale antichissimo Re conservasse qualche vestigio. Venne opportuno il Γραια , che



Omero Iliad. B. 498 colloca nella Beozia. Ma quale ne fu più esattamente la sua posizione? Grea è un luogo vicino ad Oropo, ovvero secondo altri è Tanagra stessa καὶ ἡ Γραῖα δ' ἐστὶ τόπος Ὀρωπέης πλησίον . . . . . τινὲς δὲ τῇ Τανόγρῳ τὴν αὐτὴν φασί, così Strabone IX p. 404. Grea è l' antico nome di Tanagra, così Pausania *Descr. Gr.* IX 20. Grea è Oropo stessa, così Aristotele presso Stefano. Grea, luogo dell' Oropia, giace verso il mare d' Eretria, e d' Eubea, così Stefano nel già riferito passo. Grea finalmente è ciò, che dipoi fu chiamato il suolo della contrada Tebea, τὴν δὲ Γραῖαν ἔνιοι λέγουσι τὸ νῦν τῆς Θηβαϊκῆς καλέμενον ἔδος, così alcuni presso Stefano alla voce Τάναγρα. Tante varie opinioni dimostrano, che, se esisteva nella Beozia il luogo detto Γραῖα, la sua posizione era assai incerta. Però Stefano Bizantino pregiudicando, che Grea giacesse presso Oropo lesse Γραικῶν nel passo di Tucidide o pensatamente, o per ismemoratezza, siccome toccai più sopra.

Ed in proposito di Γραῖα reca meraviglia, siccome nessuno degli antichi geografi abbia allegata una autorevole testimonianza di Senofonte. Narra egli *Hellen.* V 4. 50 ed. Weiske, che Agesilao essendosi mosso contro Tebe, i Tebani si erano schierati ἐπὶ Γραῖας ὁρᾷ, così hanno i testi; ma lo Schneider, il Moro, lo Stürz, ed altri critici vogliono emendare ἐπὶ Γραίας ἔδει. Comunque scrivasi, è certo, che o Γραῖα, o Γραῖας era un luogo posto nella Beozia, siccome attestò Omero, e segnatamente situato tra Tebe, e Scolos, siccome rilevasi da Senofonte. Epperò Γραῖα non dovrebbe



più cercare nè presso Tanagra, nè nell'Oropia, ma bensì al mezzodì di Tebe.

Deliberatomi così dall'incongruo passo di Stefano, parmi che maggior fede ora prestare si debba all'esistenza del territorio Piraico, il quale non più nel solo libro II. 23 di Tuciddide si incontra, mà altresì nel libro III. 91. Bella, e greca voce si è questa Πειραιήν, che da Πέριαιον si deriva. E siccome il Pireo d'Atene denominò Πειραιήν (Plutarch. vita Thes. et Syll.) quella porta, che metteva al porto; così un qualche porto detto Pireo presso Oropo avrà dato il nome di γῆ Πειραιήν a tutto quel territorio, che da Oropo si estende a quel porto. E che nelle vicinanze di Oropo fossevi almeno un qualche seno capace di dar tranquilla stazione alle navi, facilmente si raccoglie dal citato luogo di Tuciddide III. 91, nel quale si narra, che Nicia approdato alla spiaggia d'Oropo, e sceso a terra, vi lasciò le sue sessanta navi. Il Pireo poi era nome comune ad altri porti della Grecia, così ad uno di Corinto menzionato da Tuciddide VIII. 10.

Volendo per ultimo determinare la posizione del territorio Piraico, io comincerò a notare uno sbaglio del sig. Barbiè du Bocage, il quale nelle sue carte geografiche relative al viaggio di Anacarsi, pone in quella dell'Attica la *Piraica* dentro i confini dell'Attica medesima sotto Oropo, verso Atene; pari errore io trovo nella carta della Grecia premessa alla Inglese traduzione di Tuciddide fatta dallo

Smith. Io vorrei, che Oropo si collocasse sui confini dell' Attica e della Beozia, dicendo Strabone IX. 399 che Oropo ἔδρται ἐν μεθόριῳ τῆς τε Ἀττικῆς καὶ τῆς Βοιωτίας, però frequenti guerre insorsero fra quei due stati per deciderne la proprietà. Inoltre vorrei, che il territorio attiguo ad Oropo, e massimamente all'oriente della città, che quindi si estende al mare d'Eubea, si dicesse Piraico. Dovrebbe anche Tanagra collocare più all'insù verso Delium; ed infatti Delium era situata nella Tanagrea, al dire di Tucidide IV. 76, e di Pausania IX. 20. Termino col notare, che gli Oropii usavano il dialetto Dorico *Etymol. Magn.* 391. 17 perchè d'origine Beota.

CAROLI BOVCHERONI

DE

IOSEPHO VERNAZZA

ALBENSI

DICTA IN CONVENTU REGIAE TAVRINENSIS SCIENTIARVM ACADEMIAE

XIII KAL. IVNIAS AN. MDCCCXXII.

DE Itatorum literis egregie meriti sunt duo e nostratibus praestantissimi, Iacobus Durandius et Iosephus Vernazza, eo etiam nomine laudandi, quod in simili admodum genere, quum alter alterius partem haberet, in sua tamen uterque excelluit. Et in Durandio quidem uberior doctrina fuit, in Vernazza elegantior; ille locorum, hic temporum notationem est persecutus; primus poësin et graccum sermonem attigit adolescens, postremus italicum in scribendo nitorem cum romana urbanitate coniunxit. Quod si cum Latinis eosdem iam libet comparare, alter Plinianam rerum comprehensionem, alter Varronis diligentiam videtur imitatus. Atque utinam, ut pari industria, sic etiam felicitate fuissent! Sed Durandius, quod a natura fortasse sapientior, multos vitae casus devitavit, et in honoribus consenuit;

Vernazza, quod promptior et vehementior, privatis calamitatibus implicitus, fortunae acerbiteram incredibili constantia superavit. Sic ille pacatae lenissimaeque senectutis, hic invictae exemplum praeiuit. Durandius doctum virum exspectat, a quo laudetur; nos in recenti Vernazzae funere, eruditam eius vocem adhuc desiderantes, sodalem et amicum paucis adumbrare in animo habuimus.

Is igitur ex Alba Pompeia ad Tanarum fuit, honestissimo olim Italiae municipio, Camillae tribui adscripto, ex quo romanis temporibus fuerunt L. Publicius Celsus, bis ante calamitatem sub Traiano Consul, et P. Elvius Pertinax, in summa virtutis spe imperio simul ostensus et ereptus. Antonium patrem habuit, medicum, in arte facienda navum et diligentem. Pueritiam in bonis artibus domi transegit; Taurini mox urbanas disciplinas arripuit, ac Iohanni Bogino, Caroli III. administro, scriba ad manum fuit, cuius voluntate idem postea munus sub Morotio equite obivit. Bogino ingenium suum constat probavisse, quod propter severissimum viri iudicium, qui neminem, nisi generosum, laudavit, minime praetereundum puto. Id initium honorum fuit, quibus modicis, nec perpetuis usus est. Per id tempus magni aestimata est ipsius opera in concipienda edicti formula, quo edicto Victorius III Rex, agrorum censu imperato, aequiorem vectigalium rationem constituit. Id libenter attingo; exinde enim, crescente in dies agricultura una cum caeteris artibus, ad hanc ubertatis speciem pervenimus, praecedentibus maxime Insubribus, apud quos

Philippus Nerius Florentinus, Carlius, Verrius aliique, eam civilis scientiae partem locupletaverant, quam a privata domus procuratione, graece post Xenophontem appellant.

Sed iam tum studiis obsecutus suis, ad Thomam Terraneum accesserat, eximiae cuiusdam diligentiae virum, a quo exultioris domesticae historiae primordia, ut Romani a Censorio illo Catone, repetimus. Nam, quum antea nostri multa peccarent in tradendis regiae stirpis originibus, is primum in re admodum controversa lumen adhibuit, scribendi argumento ab Adelaide sumto, quae, initis cum Oddone nuptiis, quod in Taurinis alpibus et in Subalpinis plurimum posset, Umberto II, utriusque ex filio nepoti, causam praebeuit avitae ditionis latius propagandae. Hunc igitur, quem, posito ad sepulcrum titulo, summa pietatis significatione prosecutus est, industriae suae auctorem et principem habuit. Ipsius namque sermonibus permotus, ad patriam antiquitatem penitus cognoscendam se convertit. Et longum quidem foret singula recensere ab eo adhuc adolescente conscripta, quae, etsi multa numero, at erant eiusmodi, ut vel ipsa novitate, vel in exquirendis monumentis sollertia, se summopere commendarent.

Nec tamen in domesticis se continuit, sed et romana eo curiosius investigavit, quod ex illis haec doctorum hominum studia suam praecipuam hauriunt venustatem. Vix dici potest, quanti ab harum elegantiarum arbitris fiat vel cippus nuper e terra egestus, vel una aut altera literula casu

aliquo reperta , unde arguas quid vetus fundi aut aedificii dominus serum nepotem docere voluerit. Quid si nobile illud monumentum sit , et graeco artificio expolitum , quid si nomina vultumque illustris alicuius viri aut feminae exhibeat , quae ibi locorum consederit? Tunc enim vero est fremitus , est impetus animi , qui ex sua in alienam aetatem fertur quam celerrime , et cum antiquis ipsis , et spirantibus , et loquentibus , se putat versari. Huiusmodi sane voluptatem expertus est Vernazza , quum ex proximo Albae flumine praegrandis lapis erutus est , forma et characteribus insignis , qui Germani et Marcellae ara sepulcralis erat inscriptus. Haud ita gavisus est , opinor , Polycrates Samius , ab Herodoto memoratus , annulo nuper in mare proiecto , a piscatoribus recepto , cuius rei fama ut in Aegyptum pervenit , quod ea felicitas supra humanam videretur , veteris hospitii et amicitiae nuntium Amasis Rex ei dicitur remisisse. Rem ipse describit iis verbis , quae de summa eiusdem laetitia dubitare non sinunt. Itaque dicto die in hortum domunculae contiguum iussit asportari , ubi sibi iam seni , post urbis satietatem , Scillunteum otium fore sperabat. Qui dies magna oppidanorum frequentia ex vicinia confluentium , laetissimus Albae fuit; plane ut haec legenti Cimabuis tabulae veniat in mentem , quam is , picturae miraculo tunc novo inter mortales , incredibili civium admirantium concursu , Florentiae ostendit.

Multis postea argumentis evicit Vernazza , qui fuerit ille Germanus , suus olim municeps , et quo praeccipue tempore



aram posuerit. Id praestitit latina opella sane brevi, unde facile possis de scriptoris peritia existimare. Quam quidem brevitatem nonnulli inopiam, ego delectum interpreter. Acerrimae autem mentis est, in magna rerum copia illustriora quaedam carptim sic pertractare, ut caetera consulto, non inscientia praeteriisse videaris. Quod gratissimum accidit lectori, qui suo iudicio plura intelligat relinqui. Atqui brevitatis huiusce studiosissimus erat Vernazza, eo magis quod in suis opibus esse vellet, et loca ab aliis pertractata religiose veluti omitteret, viatorum similis, qui invisitatas regiones quaerunt, notas relinquunt. Hinc integros adhuc historiae fontes adivit, et in genealogiis familiarum sic versatus est, ut semper aliquid ignotum ac reconditum profferret; eo enim studio ab Attico frequentato, in primis delectabatur, cuius libris nihil dulcius esse aiebat Cornelius Nepos iis, qui cupiditatem haberent notitiae clarorum virorum. Hoc praestitit in vitis Benvenuti Georgii, Petrini Bellii, Galeotii Carettii, Petri Ioffredi aliorumque, praecipue vero in intermortua veterum pictorum memoria ex vetustatis annalibus eruenda. Quod si dixerim, per eum potissimum factum fuisse, ut sinceras ac plene extinctas Subalpinae picturae origines teneremus, quum tamen antea multi de iis ambitiose scripsissent, nequaquam erroris argui posse putaverim.

At multo maiore diligentia typographiae primordia illustravit. Cuius originum cognitio multas et egregias habet utilitates ad penitiorum scientiam literarum. Sunt quippe

complures libri formis editi, non minoris habendi, quam codices manu exarati, in quorum comparatione admirabilis criticae artis vis ac praestantia elucet. Et experimento quidem nunc compertum est, quanto id usui sit, tum quia exemplaria, unde libri descripti sunt, aetas delevit, tum propter recentiorum intemperantiam, quos nulla religio deterruit, ne falsa et aliena veterum scriptis passim admisce- rent. Quin etiam ipsa inquisitio haud parum in se habet iucunditatis, quum videas, ubi praesertim, et a quibus nobilissima ars celebrari coepta sit. Adde iam, si ita placeat, elegantiorum hac in re delicias; nam quis modum alienae statuat voluptati? adde nonnullorum librorum raritatem, quos non alio consilio magno interdum aere paramus, quam ut nobis liceat primaevos illos characteres oculis conspicere. Harum rerum causa, multa prorsus peregrina exquisivit Vernazza, vulgatis passim de typographia scriptiunculis, quas equidem legens, mirari non desino, qui potuerit Mettairii et Meermannii vix credibiles investigationes longe post suas relinquere.

Quae omnia diligentissimi hominis sunt; ad exquisitam vero doctrinam pertinebat ipsius in scribendis latinis titulis praestantia. De eo enim utrumque illud Tullianum de Crasso et Scaevola poterat usurpari, et elegantium fuisse parcissimum, et parcorum elegantissimum. Id porro quam difficile sit, quis dubitet, quum ante Morcellium adeo pauci hoc in genere ad veterum laudem potuerint accedere? Nec id mirum; nam praeter expressam antiquitatis effigiem,

quam in inscriptionibus quaerimus cupidissime, stilum ex poësi et prosa oratione sic temperatum volumus, ut ab illa spiritus, ab ista voces et colorem accipiat. Nec vero solum magnificae res, aut tenues sunt narrandae, sed praeclara persaepe sententia, quasi lumen addenda, quae ob brevitatem arguta, plus tamen habeat sapientiae, quam acuminis. Quo circa Bembus ipse haud caruit reprehensione in epigrammate Vrbinati appposito, ubi plus dicere visus est, quam vellet. Scil mirus erat Vernazza propter summam sermonis proprietatem et auctoritatem. In sepulchralibus monumentis, in quibus amissum amicum, aut filiolam postremo compellantes, solatium dolori quaerimus, leniorem fortasse voluisses; at obstabat natura ad molliores affectus parum proclivis. Erat praeterea in homine Sallustianus quidam nisus et Aeschylea mentis celsitudo, quae cuncta potius ad se raperet, quam usquam posset inflecti. Felicissimus autem fuit non modo in rebus a Latinis indictis, latine explicandis, sed etiam in exprimendis variis hominum moribus et ingeniis. Id praecipue assecutus erat Tullii et Plinii maioris lectione, quorum pulcherrimas dictiones ab aliis minus animadversas, studiose inter legendum notaverat.

Nulla ferme res gesta est in Subalpinis per triginta et amplius annos, nullus paullo illustrior vir fuit, quin aliqua inscriptione posteritati prodiderit. Haec tamquam voluptaria erant in vita laboriosissima, multisque molestiis conflictata. Nam qui numquam in beatissimis habitus fuerat, rem familiarem admodum attriverat, sive quia magnificentior

interdum esse vellet, sive largius insumeret in acquirendis libris et rarioribus artium monumentis. Ea difficultas in dies crevit posteaquam Subalpina res in Gallorum potestatem venit. Accidit tunc, ut Romam et Neapolim peteret, unde reversus in suspiciosissimis temporibus calumniam effugere non potuit, et militi in custodiam traditus est, qui, et domi observaret, et per urbem comitaretur. Inde maioribus angustiis premi coepit. Sed enim Prosperi Balbi, viri amplissimi opera, ab omni periculo liberatus, publicae bibliothecae praefectus est cum munere historiae et artis criticae docendae. In bibliotheca se gessit diligenter, et magnam ab exteris doctis gratiam inivit nitidissimis codicum descriptionibus, quas vel ipse per se, vel per alios curabat. In docendo effecit, ut non modo intemperiem ingenii discipuli aequo animo ferrent, sed eisdem etiam esset carissimus.

Hisce muneribus functus est ante restitutum regnum; successorem postea in bibliotheca habuit, sed ad docendi munus ab eodem Prospero Balbo mox fuit revocatus. Tunc maiorem diligentiam in literis videtur adhibuisse, et plura quam antea in lucem edidisse. Varias eiusdem lucubrationes, tam italicas, quam latinas, in Academia audivimus, in quibus eminet enarratio diplomatis Hadriani imperatoris, vel potius honestae romani militis missionis, aeneae tabulae inscriptae, atque in insula Sardinia paullo ante repertae. Ea usus opportunitate, plurima ad romanam antiquitatem pertinentia, copiose explicavit. Scriptum protulit in celeberrimis

Academiae comitiis, quo die Victorium Emmanuelem Regem una cum Regia coniuge et genero, auspicato excepimus. Grandis erat scriptionis stilus, cui erudita literarum pronuntiatio, et permanens ac sonora vox maiorem etiam dignitatem conciliabat. Nonnulla fuit opinio, multum nuper fuisse in illustrando Caroli Emmanuelis I regno, cuius rei specimen esse aiunt ipsius commentariolum de Laura et Ardente pictore, et ingeniosissimi symboli interpretationem, quo Torquatus Tassus utriusque nuptias celebravit. Verum de his nihil amplius scire licuit; nam vir in caeteris apertus, de suis studiis tecte et per ambages loquebatur.

Sed heus! eum amplius non vidimus. Nam postridie, quam Academiae conventus habitus est, dysuriae morbo decubuit, quo Sadoletus laborabat. Omnes in afflicta sodalis valetudine dolebamus, quum repente rumor increbuit ei esse meliuscule. Unus et alter et tertius dies ab ea spe abierat, sed ecce quarti fulmen! III Id. huius mensis, supremis religionibus sancte defunctus, ac rebus suis placide compositis, sub primam noctem iam decesserat. Quem quidem properantem mortem sine formidine puto adspexisse; qui enim in omni vita continentissimum se praebuit, idem pietate in Deum fuit, pura et integra. Itaque, et saepe adorabat, et mortalitatis suae memor, temporum aeternitatem cogitatione versabat assidue. Fuit corporis proceritate insigni, gressu firmo et stabili, vultu romano, prominentibus ac severis oculis, quos tamen summa comitate leniret. Multorum amicorum fidem et liberalitatem expertus est;



complures etiam habuit obtrectatores, vel suae doctrinae dissimulanter invidos, vel ardentiore aliquo verbo laccessitos. Nobilitatem iuvenis quaesivit; senex, tribus ab hinc annis, equestri dignitate a Victorio Emmanuele donatus est, quod ei contigit iucundissimum, tum propter amplitudinem, tum quia spectatam suam erga Regem observantiam luculento testimonio probari gaudebat. Quintum et tricesimum annum natus, Hyacintham Faussoniam, nobilem virginem, uxorem duxit; moriens Hectorem filium cum liberis reliquit. Vixit annos LXXVII. Monumentum ei publice datum est Decurionum decreto.

Quod si ipsius ingenium posterì nosse velint, aio fuisse virum promptae accurataeque doctrinae, memoria tenacissima; in parvis et minutis ut plurimum constitisse, quum tamen, uti athleta nobilis et pectus et lacertos in ampliore palaestra posset ostentare. Literas non callide aut ambitiose, sed ex animo amavisse, quas nec plebeias, nec sordidas artes esse aiebat, sed ad hominis dignitatem vehementer pertinere. In his autem suos certos sensus habebat. Imitatores, comicos larvatos appellabat; quum apud me esset, et Sigonianum librum de Consolatione vidisset, ubi multa sunt a Cicerone deprompta, at parum expressa, en, inquit, Niobeam formam, pulchram, sed lapideam. Si quis apprimè doctus vulgarem eruditionem ostentaret, cum patriciis romanis comparabat, qui epulas multitudini pararent. Tullio maxime delectabatur, ac divinam illam facundiam laudans, haud inepte addebat, in ipsius operibus italicum sermonem



esse addiscendum. Ut summae integritatis est improbos odisse, sic magni in literis profectus indicium esse arbitrabatur, si quis malos scriptores ne ferret quidem; eandem enim esse recti pulchrique rationem. Adeo diligentiae studuit, ut, si lituram faceret, codicillos ad amicos rescriberet. Laborem et dolorem fortiter supra quam dici potest, toleravit, et nunquam de fortuna conquestus est. Notus per epistolas fuit hominibus aetatis suae literatissimis; in civitate coluit praesertim Calusium, et amplissimos viros Balbum et Galeanium Napium; totam vero Salutorum domum devinctam habuit consuetudine, ab eaque in suis temporibus mirifice sublevatus est. Plura dicenda superessent, sed hominem veritatis et brevitatis amantissimum, breviter et siue assentatione malui laudare.

*Fine del Volume XXVI terminato in luglio MDCCCXXII.*









